

# Transformada de Laplace: uma obra de engenharia

(Laplace transform: an work of engineering)

Danny Augusto Vieira Tonidandel<sup>1</sup> e Antônio Emílio Angueth de Araújo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Faculdade Santa Rita, Conselheiro Lafaiete, Minas Gerais, Brasil

<sup>2</sup>Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil

Recebido em 11/10/2010; Aceito em 2/2/2012; Publicado em 20/4/2012

Gerações de físicos e engenheiros têm se utilizado das transformadas, principalmente da transformada de Laplace, como atalhos para solução de problemas e para estudo de fenômenos transitórios e permanentes. Mas seria a transformada de Laplace mesmo de Laplace? Mais do que simplesmente uma técnica, a história que permeia seu desenvolvimento pode ser vista como uma verdadeira saga de quase 200 anos. Seu nome rende homenagens ao grande matemático francês Pierre-Simon de Laplace, mas isso não é tudo. Na tentativa de responder a esta questão e estimular o interesse pelo estudo das técnicas de transformação em geral, são apresentados alguns traços históricos e inovações que fizeram dessa extraordinária ferramenta uma verdadeira obra de engenharia.

**Palavras-chave:** transformada de Laplace, história da física, educação superior.

Generations of physicists and engineers have been using the mathematical transforms, especially the Laplace transform, as a short-cut to solve countless problems and to study transient and steady-state phenomena. However, it is the Laplace transform really Laplace's? Its history could be viewed as a truly 200 year-old saga. Its name pays homage to the great french mathematician Pierre-Simon de Laplace, but that is not all. In attempt to answer this question and stimulate the interest on topics concerned to transform techniques, a historic approach is presented showing some technical innovations that made out of this extraordinary tool a real work of engineering.

**Keywords:** Laplace transform, history of physics, higher education.

## 1. Introdução

A transformada de *Laplace* é amplamente conhecida e utilizada, principalmente nas ciências exatas e engenharias. Encarada como um “ritual de passagem” pelos estudantes de graduação, ela pode ser usada para análise de sistemas lineares invariantes no tempo, tais como circuitos elétricos, osciladores harmônicos, dispositivos ópticos e sistema mecânicos. Nessas aplicações costuma-se interpretá-la como transformações do domínio do tempo para o domínio de frequências. A vantagem mais interessante desta transformação é que as integrações e derivações tornam-se multiplicações e divisões. Ela permite fazer a resolução de equações diferenciais em forma de equações polinomiais, que são muito mais simples de resolver.

### 1.1. A transformada é de fato de Laplace?

Pelo menos em teoria, todo sistema físico pode ser descrito por meio de uma ou mais equações diferenciais que representam com precisão ou, pelo menos, razoavelmente

bem a dinâmica do sistema. Rigorosamente, uma equação diferencial é uma equação que possui derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes. Estas equações podem ser obtidas através das leis físicas que regem o comportamento do sistema, como as leis de *Newton* para sistemas mecânicos ou as leis de *Kirchhoff* para sistemas elétricos. Para sistemas lineares e invariantes no tempo as equações são ordinárias e podem ser analisadas por meio de alguma técnica de transformação, como a transformada de *Laplace*, que tem a propriedade de transformar uma equação diferencial ordinária em equação algébrica, ou uma equação diferencial parcial em ordinária.

É mais do que natural pensar que seu nome deva-se ao grande matemático e astrônomo francês, marquês da corte de *Napoleão Bonaparte*, *Pierre-Simon de Laplace* (1749-1827). Contudo, a transformada de *Laplace* seria mesmo *de Laplace*? A resposta para esta pergunta, por mais óbvia que pareça, não é tão simples. Em verdade, sua história é uma verdadeira saga de quase 200 anos, recheada de inovações empolgantes, disputas e

<sup>1</sup>E-mail: tonidandel@ufmg.br.

mal-entendidos, que remonta aos primeiros trabalhos do matemático suíço *Leonhard Euler* (1707-1783) em 1737 e *Laplace* em 1774, passando por nomes como *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813) e o conterrâneo de *Laplace*, *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857), já no século XIX [1].

*Laplace* certamente desenvolveu as bases da teoria nascente e propiciou grandes contribuições em funções especiais, teoria das probabilidades, astronomia e mecânica celeste. A transformada de *Laplace*  $F(s)$  de uma função causal<sup>2</sup>  $f(t)$  é definida pela Eq. (1)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1)$$

em que  $s = \sigma + i\omega$  é uma variável do plano complexo e a notação “ $\mathcal{L}\{\}$ ” é um operador linear que significa “transformada de *Laplace* de”. O termo exponencial é o chamado *kernel* ou núcleo da transformação.

Historicamente, o desenvolvimento das técnicas de transformação começa com a procura por soluções de certos tipos de equações diferenciais na forma de integrais reais definidas [o que mais tarde acabou não se verificando, pois as transformadas em sua maioria são integrais de contorno em um plano complexo]. Esta busca começa com *Euler*, que considera transformações do tipo (2), similares à versão moderna da transformada de *Laplace* [2]

$$y(u) = \int_a^b e^{K(u)Q(x)} P(x) dx, \quad (2)$$

para resolver uma equação linear de segunda ordem com coeficientes variáveis da forma

$$L(u) \frac{d^2 y}{du^2} + M(u) \frac{dy}{du} + N(u)y = R(u)e^{K(u)Q(u)}, \quad (3)$$

que aplicada na Eq. (3) leva a uma solução na forma de integral definida do tipo

$$y(x) = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V(u) du. \quad (4)$$

Somente em 1779, *Euler* considera a solução de equações diferenciais parciais. Mas, como *Laplace* entra nesta história? Após os primeiros trabalhos de *Euler*, *Lagrange* fez uso [com algumas adaptações] das integrais de *Euler* no estudo da teoria das probabilidades que, por sua vez, viriam a influenciar o marquês de *Laplace*. Após 1774, *Laplace* escreveu vários artigos sobre o assunto, incorporando os resultados em 1812, em seu *Théorie Analytique des probabilités*. No artigo de 1779 [3], quando estudava o problema da interpolação, *Laplace* apresenta a noção de função geratriz de uma sequência:

<sup>2</sup>Uma função  $f(t)$  é dita causal se  $f(t) = 0$  para todo  $t < 0$ .

$$u(t) = \sum_{x=0}^{\infty} y^x t^x. \quad (5)$$

Se  $y_x$  for definido para todo  $x > 0$ , a equação pode ser reescrita como

$$u(t) = \int_0^{\infty} y^x t^x dx, \quad (6)$$

o que mostra que já a esta época, *Laplace* escrevia a transformação de uma forma próxima à atual. Hoje ela ainda é utilizada para resolver certos tipos de equações diferenciais e é conhecida como transformação de *Mellin*. As investigações de *Laplace* no problema da interpolação parecem ter sugerido o estudo de formas similares à Eq. (1), por ter obtido algumas soluções na forma exponencial [4]. Contudo, o desenvolvimento do que os estudantes conhecem hoje como “transformada de *Laplace*” não termina por aí.

## 1.2. Reinvenção da transformada

O desenvolvimento da transformada de *Laplace* deve-se a muitos nomes além do próprio *Laplace*, como *Cauchy*, por seus trabalhos em cálculos de resíduos e explorações em métodos simbólicos (utilizando operadores diferenciais). Importante ressaltar que um grande contributo para que a teoria pudesse se tornar um método viável para solução de problemas práticos foi dado pelo intrépido e obscuro inglês *Oliver Heaviside* (1850-1925). *Heaviside*, homem simples e sem instrução formal, foi uma das trágicas figuras da ciência, ao mesmo tempo amado e odiado por homens de ciência do seu tempo. Seu peculiar modo de trabalho, que chamava de “matemática experimental” e seu estilo debochado causaram a ele muitos embaraços. Com o inestimável auxílio de G.F. Fitzgerald e O.J. Lodge [5], *Heaviside* contribuiu para formalizar a teoria eletromagnética de Maxwell – que originalmente totalizava 38 equações, em apenas 4 equações fundamentais – e contribuiu para que o cálculo vetorial se firmasse como ferramenta básica do eletromagnetismo, em oposição à teoria dos quatérnions de *Hamilton*. Também foi quem primeiro resolveu o problema da onda viajante em uma linha de transmissão sem distorções, o que tornou possível a comunicação transatlântica de telégrafos. Em física, foi o primeiro a teorizar a existência de uma camada condutiva na atmosfera (ionosfera ou camada de *Heaviside-Kennelly*), que permite que uma onda eletromagnética viaje segundo a curvatura da Terra. Foi também quem sugeriu que uma carga elétrica em movimento aumenta sua massa com o aumento da velocidade (uma das premissas da teoria da relatividade). Chegou inclusive a prever a propriedade da supercondutividade nos materiais.

## 2. Redescobrimo a transformada

### 2.1. O cálculo operacional

Durante o último quarto do século XIX, *Heaviside* escreveu para modesta revista de técnicos em eletricidade, chamada *The Electrician* (O eletricitista, posteriormente compilados nos *Electrical Papers* de 1892) [6], sobre uma técnica que havia desenvolvido e chamado de cálculo operacional. Tal técnica era, em alto e bom som, nada menos que a transformada de Laplace, de maneira próxima como a conhecida atualmente, inclusive com a noção de operadores lineares. A diferença era que, até então, o cálculo operacional tratava de funções apenas no domínio do tempo. Não se tinha ainda a noção de “domínio da frequência” e “domínio do tempo”, que foram incorporados posteriormente. Mas como ele procedeu? A melhor forma de entender o método de *Heaviside* é, sem dúvida, com um exemplo prático, em consonância com seu peculiar método de trabalho.

### 2.2. Fazendo matemática experimental

Considere um circuito composto por um resistor e um indutor (*RL*) alimentado por uma fonte de tensão  $e = E.H(t)$ , onde  $H(t)$  é a função de *Heaviside*, que muito mais tarde ficou conhecida como função degrau unitário. Esta função, que foi criação de *Heaviside* [7], pode ser expressa como

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (7)$$

e é ilustrada na Fig. 1.

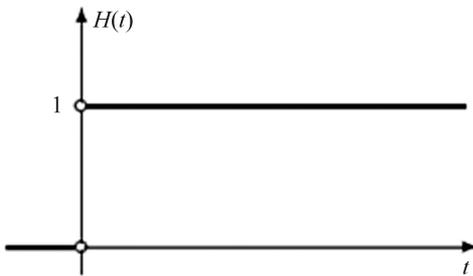


Figura 1 - Função degrau unitário ou função de *Heaviside*.

Aplicando a lei de *Kirchhoff* das tensões no circuito da Fig. 2, tem-se

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}, \quad (8)$$

sem a maior cerimônia, *Heaviside* rescrevia a equação, substituindo o símbolo de derivada “ $d/dt$ ” pela letra “ $p$ ”. A partir daí, começava a tratar o “ $p$ ” como uma entidade algébrica qualquer, um número, logo

$$e = LpI + RI, \quad (9)$$

em que  $I = I(p)$ . Logo, isolando  $I$ , tem-se

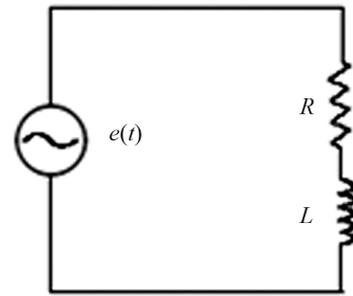


Figura 2 - Circuito RL alimentado.

$$I(p) = \frac{1/Lp}{1 + R/Lp} e. \quad (10)$$

A Eq. (10) é chamada equação operacional do problema. Em seguida, *Heaviside* buscava comparar a forma da equação operacional com soluções conhecidas de problemas existentes, para inferir, deste modo, regras para sua interpretação e convertê-la em solução explícita (em função de  $t$ ). Uma de suas saídas favoritas eram as séries de potência [8]. Ele sabia que

$$\frac{1}{(1+x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (11)$$

E por analogia, rescrevia a expressão em potências descendentes de  $p$

$$I(p) = \left[ \frac{1}{1 + \frac{R}{Lp}} \right] \frac{e(t)}{Lp} = \left[ \left( \frac{R}{Lp} \right) - \left( \frac{R}{Lp} \right)^2 + \left( \frac{R}{Lp} \right)^3 - \left( \frac{R}{Lp} \right)^4 + \dots \right] \frac{e(t)}{R}. \quad (12)$$

Substituindo o valor da tensão de entrada  $e = E.H(t)$ , chega-se a

$$I(p) = \frac{E}{R} \cdot \left[ \left( \frac{R}{Lp} \right) - \left( \frac{R}{Lp} \right)^2 + \left( \frac{R}{Lp} \right)^3 - \left( \frac{R}{Lp} \right)^4 + \dots \right] \cdot H(t). \quad (13)$$

O uso da função degrau unitário causava muita confusão, em virtude da notação usada por *Heaviside*, que a denotava por “1”. Além disso, uma investigação da Eq. (13) levanta a questão: o que vem a ser a expressão

$$\frac{1}{p} \cdot H(t) = \left( \frac{d}{dt} \right)^{-1} \cdot H(t) ? \quad (14)$$

Ora, se

$$p \cdot f(t) = \frac{df(t)}{dt},$$

então

$$\frac{1}{p} \cdot f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (15)$$

Logo,

$$p^{-1} \cdot H(t) = \int_0^t H(\tau) d\tau = t \quad (16)$$

$$p^{-2} \cdot H(t) = p^{-1} \cdot p^{-1} \cdot H(t) = \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2!} \quad (17)$$

$$p^{-n} \cdot H(t) = \frac{t^n}{n!} \quad (18)$$

Assim, substituindo as Eqs. (14) a (18) na Eq. (13), tem-se a expressão da corrente em uma série de potências ascendentes de  $t$

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot \left[ \left( \frac{R}{L} t \right) - \frac{1}{2!} \left( \frac{R}{L} t \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{R}{L} t \right)^3 - \dots \right] \cdot H(t) \quad (19)$$

No entanto, *Heaviside* sabia que

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (20)$$

logo, comparando-se as Eqs. (19) e (20), reconhece-se que

$$i(t) = \frac{E}{R} [1 - e^{(-R/Lt)}], \quad (21)$$

que é a solução correta e completa para a corrente.

O processo de expandir equação operacional (em forma de séries convergentes, como a Eq. (13) ou séries divergentes) de tal modo a obter a solução temporal é o que *Heaviside* chamava de “*algebrizing*”, um “processo de *algebrizar*” a equação. Curioso notar que ele não tinha (ou não se preocupava em fornecer) uma justificativa plausível para o uso. Talvez por isto ele criava um ambiente de hostilidade<sup>\*4\*</sup> com os matemáticos da época, utilizando justificativas do tipo: “o antídoto está, quase sempre, muito próximo ao veneno”.

Contudo, deve-se enfatizar que *Heaviside* não ensinou nada de novo aos matemáticos: já àquela época, o uso de operadores diferenciais era conhecido, apesar de *Heaviside* ter criado sua própria versão do assunto, principalmente pelo uso das séries de potências.

A verdadeira contribuição de *Heaviside*, e pela qual ele merece crédito, foi por ter mostrado como aplicar o que ele chamou de “Cálculo Operacional” em problemas físicos reais de grande relevância tecnológica. Mais especificamente, uma de suas contribuições foi o “Teorema da Expansão”: similar ao que hoje é conhecida como expansão em frações parciais para uma

função racional, sua formulação e utilização são as provas vivas de seu estilo, já que foi estabelecido sem qualquer prova matemática. Atualmente, o Teorema da Expansão ainda é uma das bases fundamentais entre os métodos que englobam a transformada de *Laplace*. Todavia, inovação de *Heaviside* não reside apenas neste fato e sim, principalmente, por ter usado o Teorema da Expansão, com sucesso, para funções não-rationais, principalmente ao defrontar-se com o problema das linhas de transmissão, que desafiava os cientistas da época. Nele, *Heaviside* utilizou o teorema para resolução de uma equação diferencial parcial, o que seria “proibitivo”. A fórmula da expansão é a Eq. (22)

$$f(t) = \mathcal{T}^{-1} \left\{ \frac{N(p)}{D(p)} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{N(\alpha_k)}{\frac{d}{dp} \{D(\alpha_k)\}} \cdot \frac{e^{\alpha_k t} - 1}{\alpha_k} \quad (22)$$

que fornece a função temporal  $f(t)$  a partir da equação operacional, o que é similar ao que é chamado hoje “transformada inversa”, simbolizada por “ $\mathcal{T}^{-1}$ ”. Os valores de  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  são os polos do denominador  $D(p)$ ;  $N(p)$  é o numerador da expressão operacional (em função da variável  $p$ ). Outros métodos, apesar de eficazes, são geralmente dispendiosos por exigirem operações como integrais de linha em contornos fechados ou expansões assintóticas em séries de potências, geralmente distantes do dia-a-dia do engenheiro, o que os tornam muitas vezes impraticáveis.

### 3. Do cálculo operacional para a integral de Laplace

Dentre os responsáveis por estabelecer o rigor faltante ao método de *Heaviside* está um dos seus grandes admiradores, o engenheiro americano, da *Bell Telephone and Telegraph Company*, *John Carson*. Em seu livro, *Electric Circuit Theory*, publicado em 1926 e reeditado em 1953 [9], *Carson* toma para si a responsabilidade de continuar o trabalho de *Heaviside*, introduzindo o formalismo matemático e deduzindo todas as fórmulas que o mentor havia proposto. Foi ele o responsável pela conexão entre o Cálculo Operacional de *Heaviside* e a integral de *Laplace*, apresentada na seção 1.1, demonstrando que todas as fórmulas criadas por *Heaviside* poderiam ser obtidas a partir dela, sem a utilização das “irritantes” séries divergentes.

#### 3.1. Como ele conseguiu?

Utilizando o método operacional, *Carson*, assim como *Heaviside*, considerava a função de entrada de um circuito uma tensão do tipo degrau unitário  $H(t)$ . A resposta de corrente (em função de  $p$ ) a esta entrada era

<sup>3</sup>Aqui, *Heaviside* omite a constante de integração.

<sup>4</sup>Até mesmo admiradores de *Heaviside* mudavam de opinião neste quesito: Em seu livro, *Carson* denomina a utilização de séries divergentes por *Heaviside* de “intelectualmente repugnante”.

dada pela Eq. (23)

$$i_n(t) = H(t)A_{n1}(t), \tag{23}$$

onde  $A_{n1}$  foi chamada de *Admitância Indicial* ou *Admitância Indicial de Transferência*, ou seja, a “função de transferência” do sistema, do ramo  $n$  em relação ao ramo 1. Para obter a equação do “tipo Laplace”, Carson considerava um circuito elétrico qualquer. Em resposta à uma entrada arbitrária  $e(t)$ , a corrente em um instante  $t = \tau$  seria  $i = e(\tau)A(t - \tau)$ . Supondo a decomposição de  $e(t)$  em uma série de degraus tem-se, pelo princípio da superposição, a corrente de saída mais conhecida como integral de *Duhamel*

$$i(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t e(\tau)A(t - \tau)d\tau. \tag{24}$$

Supondo uma tensão de entrada exponencial  $e(t) = e^{pt}$ , com  $p$  um número complexo, a resposta em corrente (transitória e permanente), pode ser expressa por

$$i(t) = \frac{e^{pt}}{Z(p)} + y(t). \tag{25}$$

$Z(p)$  é chamado de operador impedância (similar às impedâncias complexas da transformada de Laplace). Substituindo a Eq. (25) na equação de *Duhamel*, chega-se, após alguma manipulação algébrica, ao resultado responsável por dar sentido ao “desleixado”<sup>5</sup> método de *Heaviside*

$$\frac{1}{pZ(p)} = \int_0^\infty e^{-pt} A(t)dt. \tag{26}$$

As Eqs. (24) e (26) constituem por sua vez a formulação completa do problema. Em verdade, Carson dava tanta importância ao resultado, que as denominava “equações fundamentais da teoria de circuitos”. A partir delas é possível obter todas as regras do cálculo operacional de *Heaviside*. Foi após este resultado que Carson compôs a primeira tabela com os pares de transformadas, que ele batizou de “tabela de integrais infinitas”, como ilustra a Fig. 3, tendo-as utilizado pela primeira vez na resolução de problemas práticos, reduzindo a solução de uma equação operacional em simples comparação com a tabela, o que ainda é feito atualmente.

<p>(a) <math>\int_0^\infty e^{-pt} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{p+\lambda}</math>  <math>h = \frac{p}{p+\lambda} = e^{-\lambda t}</math></p> <p>(b) <math>\int_0^\infty e^{-pt} \frac{t^n}{n!} dt = 1/p^{n+1}</math>  <math>h = \frac{1}{p^n} = t^n/n!</math></p> <p>(c) <math>\int_0^\infty e^{-pt} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} dt = \frac{1}{\sqrt{p}}</math>  <math>h = \sqrt{p} = 1/\sqrt{\pi t}</math></p> <p>(d) <math>\int_0^\infty e^{-pt} \frac{(2t)^n}{1.3.5 \dots (2n-1)\sqrt{\pi t}} dt = \frac{1}{p^n \sqrt{p}}</math>  <math>h = \frac{\sqrt{p}}{p^n} = \frac{(2t)^n}{1.3.5 \dots (2n-1)\sqrt{\pi t}}</math></p>	<p>(e) <math>\int_0^\infty e^{-pt} \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{(p+\lambda)^{n+1}}</math>  <math>h = \frac{p}{(p+\lambda)^{n+1}} = \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t}</math></p> <p>(f) <math>\int_0^\infty e^{-pt} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi t}} e^{-\lambda t} dt = e^{-2\sqrt{\lambda p}}</math>  <math>h = p e^{-2\sqrt{\lambda p}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi t}} e^{-\lambda t}</math></p> <p>(g) <math>\int_0^\infty e^{-pt} \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{\pi t}} dt = \frac{e^{-2\sqrt{\lambda p}}}{\sqrt{p}}</math>  <math>h = \sqrt{p} e^{-2\sqrt{\lambda p}} = \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{\pi t}}</math></p> <p>(h) <math>\int_0^\infty e^{-pt} \sin \lambda t dt = \frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}</math>  <math>h = \frac{p\lambda}{p^2 + \lambda^2} = \sin \lambda t</math></p>
---	--

Figura 3 - Primeira tabela com os “pares de transformadas”.

### 3.2. A técnica se espalha

Apesar dos esforços de Carson, o método era ainda, de certa forma, de difícil aplicação; principalmente nos casos em que, na resolução de um problema, não se

encontrava um correspondente direto na tabela de integrais, que ele havia criado. Contudo, o problema de encontrar  $A(\tau)$  de forma que a Eq. (26) se verificasse já havia sido resolvido, cerca de uma década antes, em 1916, pelo matemático da universidade de Cam-

<sup>5</sup>O “obscuro” método de Heaviside pode ser evidenciado por trabalhos de contemporâneos. Talvez, um dos mais importantes seja do notório físico-matemático Harold Jeffreys, da Universidade de Cambridge. Dois anos após a morte de Heaviside (1927), Jeffreys escreveu em seu livro “Operational Methods in Mathematical Physics”, publicado pela Cambridge University Press, que o método de Heaviside, apesar de “desleixado”, havia sido completamente decifrado pela formulação de Bromwich. Para Jeffreys, “his methods [referindo-se a Heaviside] may appear slipshod, but his precautions were such that they practically always gave the right answer.... He left the mathematicians with the problem of explaining why the answers were right, which was duly solved, in time, by Bromwich, and it was then found that many of Heaviside’s solutions could be obtained easily by workers without his amazing skill in manipulation, but using the theory of the complex variable” [10].

bridge, Thomas Jonh I'Anson Bromwich (1875-1929). Bromwich mostrou como interpretar o trabalho de Heaviside em termos de integrais complexas do “tipo Laplace”, utilizando a teoria de funções de variáveis complexas. Aliás, Heaviside chegou a trocar várias cartas com Bromwich, antes da morte deste. Porém, o suicídio de Bromwich em 1929, impedindo a continuação do seu trabalho, provavelmente contribuiu para seu relativo anonimato durante um tempo [11]. A formulação de Bromwich forneceu a fórmula hoje conhecida como integral de inversão de Bromwich ou integral de Mellin-Fourier [12], que possibilitou o cálculo da transformada inversa (termo ainda não utilizado na época) a partir de integrais de linha no plano complexo, teoria desenvolvida por Cauchy quase um século antes. A integral de inversão de Bromwich é a fórmula

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{pH(p)} dp, \quad (27)$$

ou, na forma moderna, em termos da transformada de Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} F(s) e^{st} ds, \quad (28)$$

para um contorno fechado  $\Gamma$ .

Apesar da imensa contribuição de Bromwich na ascensão da transformada de Laplace, ele mesmo chegou a afirmar, em um artigo publicado em 1928, que “na prática, eu raramente encontrei exemplos nos quais a regra de Heaviside não pudesse ser prontamente aplicada, assim como meus próprios métodos.” [13].

Vale lembrar que a “transformada de Laplace” da forma como conhecida hoje chega aos dias atuais com a transição da variável “ $p$ ”, do cálculo operacional, para a famosa variável “ $s$ ”. Tal avanço deve-se ao matemático alemão Gustav Doetsch, ao publicar em 1937 o livro *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* [14]. No mesmo ano Louis A. Pipes [15] publicaria um artigo com a primeira aplicação prática do método em engenharia, com o título de *Laplacian Transform Circuit Analysis*. Nele, Pipes conservou a notação do operador “ $p$ ”, mas não conservou a forma da integral “multiplicada por  $p$ ”. Estes últimos trabalhos transformaram o método operacional em tarefa rotineira para as gerações do porvir.

Apesar de conhecer a formulação da integral de Laplace, Heaviside criou sua própria versão do assunto, principalmente pelo uso das séries de potência. Acreditava que a solução deveria ser em forma de série ou então em forma de uma integral definida que, para ele, não tinha nenhuma utilidade, a não ser que pudesse ser avaliada [16]. A visão de Heaviside demonstra como a tecnologia vigente influencia no que é considerada uma “boa” solução, em termos matemáticos [17]. Neste aspecto, Heaviside era apenas um homem de seu tempo.

## 4. Considerações finais

A matemática é talvez a única ciência que não necessita de um órgão sensorial, mas aparenta ser, ao mesmo tempo, um “sensor” para os mecanismos universais, ao menos aqueles tangíveis, dos fenômenos ditos materiais. As transformadas, na visão de muitos, sempre tiveram certo ar de mistério. Mas o que são realmente? Desde uma simples substituição de variáveis até uma integral de contorno em um plano complexo podem fazer parte deste contexto. Não se objetivou neste trabalho esgotar o assunto abordado, nem tampouco a história de seu desenvolvimento e aplicações. Uma pretensiosa e talvez impraticável empreitada preencheria seguramente vários livros. Buscou-se, contudo, apresentar de maneira modesta os fundamentos da transformada de Laplace, juntamente com o aspecto humano e histórico inerente ao seu desenvolvimento, na tentativa de criar uma visão unificada de seu conceito, entendendo que as transformadas são, dentre incontáveis outras técnicas, pontes que facilitam a busca por uma melhor compreensão dos fenômenos da natureza.

## Referências

- [1] M.A.B. Deakin, *Archive for History of Exact Sciences* **25**, 4 (1981).
- [2] L. Euler, *Imperial Academy of Sciences* **2** (1769).
- [3] P.S. Laplace, *Mem. Acad. Roy. Sci* **10** (1779). Também em *Oeuvres Complètes de Laplace* (Gauthier-Villars, Paris, 1887).
- [4] P.S. Laplace, *Mem. Acad. Sci* **9**, 357 (1810).
- [5] B.J. Hunt, *The Maxwellians* (Cornell University Press, Cornell, 2005).
- [6] O. Heaviside, *Electrical Papers* (Elibron Classics, London, 1892), v. 1.
- [7] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory* (Elibron Classics, London, 1893), v. 2.
- [8] Heaviside, op. cit.
- [9] J.R. Carson, *Electric Circuit Theory And The Operational Calculus* (Chelsea Publishing Company, New York, 1953). Reedição do livro de 1926.
- [10] H. Jeffreys, *Operational Methods in Mathematical Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1927).
- [11] P.J. Nahin, *IEEE Spectrum* **28**, 60 (1991).
- [12] T.J.I'A. Bromwich, in *Proceedings of London Mathematical Society*, London **15**, 401 (1916).
- [13] T.J.I'A. Bromwich, *Mathematical Gazette* **14**, 150 (1928).
- [14] G. Doetch, *Theorie und An. der Laplace-Transformation* (Springer, Berlin, 1937).
- [15] L.A. Pipes, *Philosophical Magazine Series* **24**, 161 (1937).
- [16] Heaviside, op. cit. p. 433.
- [17] Carson, op. cit. p. 32.