

Algumas observações sobre o círculo de Apolônio e o seu emprego no método das imagens

(Some remarks on the circle of Apollonius and its use in the method of images)

A.C. Tort¹

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
Recebido em 23/4/2010; Aceito em 24/1/2011; Publicado em 28/3/2011

Na geometria plana, o círculo é definido como o conjunto de todos os pontos do plano equidistantes de um ponto arbitrário O também pertencente ao plano. Apolônio de Perga (c. 262 a.C – 190 a.C.), o grande geômetra como era conhecido por seus contemporâneos, descobriu um modo alternativo de definir o círculo. O círculo de Apolônio pode ser empregado na solução do problema eletrostático envolvendo uma esfera condutora e uma carga puntiforme.

Palavras-chave: eletrostática, método das imagens.

In plane geometry, the circle is defined as the set of all points at the same distance from an arbitrary point O , also belonging to the plane. The great Greek mathematician Apollonius of Perga (c. 262 B.C – 190 B.C.) discovered an alternative way of defining the circle. The circle of Apollonius can be used in the solution of the problem concerning the electrostatic interaction between a conducting sphere and a point charge.

Keywords: electrostatics, method of images.

Na geometria plana, o círculo é definido como o conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto arbitrário O também pertencente ao plano. Apolônio de Perga² (c. 262 a.C – 190 a.C.) descobriu outro modo de definir o círculo. Eis sua definição: sejam dois pontos fixos P_1 e P_2 e um ponto arbitrário Q do plano. Seja $\overline{P_1Q}$, o segmento de reta que une P_1 a Q , e $\overline{QP_2}$, o segmento de reta que une Q a P_2 . Se

$$\frac{|\overline{P_1Q}|}{|\overline{QP_2}|} = \kappa, \quad (1)$$

onde κ é uma constante, então o conjunto \mathcal{S} dos pontos P que satisfazem está relação é o círculo. A definição de Apolônio apresenta a importante propriedade

$$|\overline{OP_1}| \cdot |\overline{OP_2}| = |\overline{OQ}|^2. \quad (2)$$

A distância $|\overline{OQ}| = R$, é o raio do círculo de Apolônio e o ponto P_1 é o ponto de inversão na esfera. A definição de Apolônio pode ser generalizada para dimensões superiores, por exemplo, para o espaço tridimensional euclidiano. Neste caso, o círculo será substituído pela

superfície da esfera.

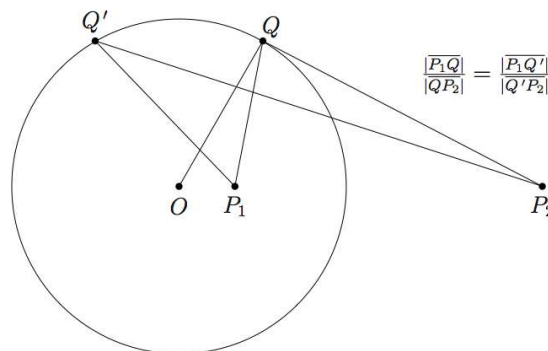


Figura 1 - O círculo de Apolônio.

O círculo de Apolônio (e sua generalização tridimensional) pode ser aplicado a vários problemas físicos. Entre esses problemas encontramos o seguinte problema de eletrostática: considere uma casca esférica condutora aterrada ($V = 0$, na superfície da casca) de raio R . Seja P_1 um ponto no interior da casca sito a uma distância

¹E-mail: tort@if.ufrj.br.

²Apolônio de Perga, o grande geômetra como era conhecido por seus contemporâneos, é considerado pelos historiadores hodiernos da matemática como um dos três grandes matemáticos da Grécia Antiga, os outros dois são Euclides (c. 300 a.C.) e Arquimedes (c. 287 a.C – 190 a.C.). Entre seus trabalhos encontra-se o importante tratado *As cônicas*, obra-prima da geometria clássica. Nesse tratado, Apolônio demonstra que as cônicas, *i.e.*: a parábola, a hipérbole e a elipse, são o resultado da intersecção do plano e do cone duplo.

D do seu centro geométrico, e P_2 um ponto no exterior da mesma. Suponha que em P_1 coloquemos uma carga puntiforme de valor q e perguntemo-nos: qual a magnitude da força entre a carga puntiforme e a casca condutora? Esta força é atrativa ou repulsiva? A casca esférica condutora, em razão da indução eletrostática, sofre um rearranjo na distribuição de suas cargas. Embora saibamos onde se encontra a carga puntiforme, a nova distribuição de cargas da casca esférica nos é desconhecida. É isto que torna o problema difícil de ser resolvido. Felizmente, há métodos para resolver este tipo de problema. Um desses métodos é conhecido como *o método das imagens* e, essencialmente, consiste em substituir a casca esférica condutora e sua distribuição complexa por uma carga fictícia, a carga-imagem q' , cuja localização, magnitude e sinal algébrico devemos determinar. A carga-imagem deve localizar-se fora da região de interesse, que no caso é o interior da casca, pois a carga total nessa região não pode ser modificada, caso contrário estaríamos lidando com outro problema. Também não podemos modificar as condições específicas do problema, por exemplo, o valor do potencial sobre superfície do condutor. Coloquemos então a carga-imagem em P_2 e escrevamos $q' = \kappa q$, onde κ é uma constante real a ser determinada. Agora, com a geometria do círculo de Apolônio em mente, acompanhemos os passos que vem a seguir.

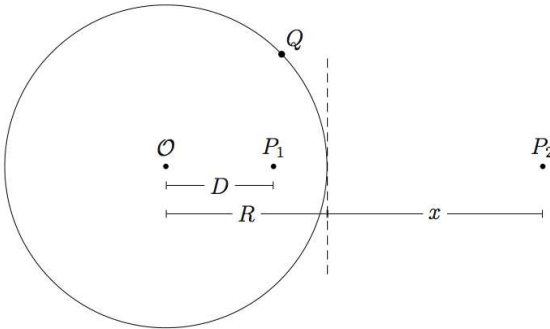


Figura 2 - A carga puntiforme q é colocada no ponto P_1 e carga imagem q' em P_2 .

Como a casca esférica está aterrada, $V = 0$ na superfície (e na região interior da casca!), os pontos P_1 e P_2 , onde estão localizadas as cargas q e q' , respectivamente, e um ponto da superfície da esfera definem uma esfera de Apolônio, pois podemos escrever

$$\frac{q}{|P_1Q|} + \frac{q'}{|P_2Q|} = 0, \quad (3)$$

onde Q é um ponto na superfície da casca condutora. Segue então que

$$\frac{|P_2Q|}{|P_1Q|} = -\frac{q'}{q} = -\kappa. \quad (4)$$

Evidentemente $\kappa < 0$, como veremos a seguir. A que distância encontra-se a carga q' do ponto da superfície

da casca condutora que lhe é mais próximo? Da Fig. 2 vem que

$$|\overline{OP_1}| = D, \quad |\overline{OP_2}| = R + x, \quad |\overline{OQ}| = R, \quad (5)$$

onde x é a menor distância entre a superfície condutora e a carga-imagem. Da propriedade dada pela Eq. (2) segue que

$$D(R + x) = R^2. \quad (6)$$

Resolvendo para x

$$x = \frac{R(R - D)}{D}. \quad (7)$$

Por outro lado, como a casca condutora está aterrada, podemos também escrever

$$\frac{q}{R - D} + \frac{\kappa q}{x} = 0. \quad (8)$$

Substituindo a Eq. (7) nesta equação temos

$$\kappa = -\frac{R}{D}. \quad (9)$$

Portanto, a carga-imagem em termos da carga q e da geometria do problema vale

$$q' = -\frac{R}{D} q. \quad (10)$$

A força entre a casca condutora e a carga puntiforme será dada pela lei de Coulomb

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{(R - D + x)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\kappa q^2}{(R - D + x)^2}. \quad (11)$$

Substituindo os resultados para x e κ calculados acima, obtemos

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R D q^2}{(R^2 - D^2)^2}. \quad (12)$$

O sinal negativo indica que a força entre a carga puntiforme e a casca condutora é atrativa, e sua direção é determinada pelo segmento de reta que une as duas cargas.

O limite do espelho plano, isto é, a força eletrostática entre a carga puntiforme q e uma superfície condutora plana pode ser obtido da seguinte forma: suponha que a distância entre a carga puntiforme e a superfície condutora seja igual a d e que o raio da esfera satisfaça à condição: $R \gg d$. Observe que a distância D da carga puntiforme ao centro da esfera deve satisfazer a uma condição similar, $D \gg d$. Neste caso, podemos impor a condição: $R - D = d = \text{constante}$. Agora escrevemos

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{RDq^2}{(R^2 - D^2)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{RDq^2}{[(R + D)(R - D)]^2}. \quad (13)$$

Fazendo uso das aproximações

$$R + D = 2R - d \approx 2R, \quad RD = R(R - d) \approx R^2, \quad (14)$$

que são justificadas pelas considerações acima, e substituindo estes resultados na expressão para a força, Eq. (12), obtemos

$$F \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2}. \quad (15)$$

que é o resultado esperado.

Suponha agora que a carga puntiforme q seja colocada no ponto P_2 , e carga-imagem no ponto P_1 . A situação física permite que continuemos a considerar a superfície da casca condutora como uma esfera de Apolônio. Portanto, escrevemos

$$|\overline{OP_1}| = R - x, \quad |\overline{OP_2}| = D. \quad (16)$$

Da propriedade fundamental dada pela Eq. (2) temos

$$(R - x)D = R^2. \quad (17)$$

Segue então que agora

$$x = \frac{R}{D}(D - R). \quad (18)$$

A condição: $V = 0$, sobre a superfície da casca condutora, permite escrever

$$\frac{q'}{x} + \frac{D}{D - R} = 0, \quad (19)$$

logo,

$$q' = -\frac{R}{D}q. \quad (20)$$

Segue que a força entre a carga puntiforme e a casca condutora continua atrativa e vale

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{RDq^2}{(R^2 - D^2)^2}, \quad (21)$$

como no caso inicial. O caso em que a esfera condutora não está aterrada, mas sim submetida a um potencial V não nulo também pode ser resolvido com o método das imagens. Considere primeiramente o caso em que a carga real está colocada no exterior da casca esférica condutora. Nesse caso podemos considerar uma segunda casca esférica de raio r menor do que R uniformemente carregada, a casca imagem. Então, usando o princípio da superposição teremos a solução do problema. Se a carga real estiver no interior da casca condutora, a casca esférica imagem deve ter um raio r maior do que R .

O método das imagens é discutido em muitos livros de eletromagnetismo de nível intermediário e avançado, em particular, o problema que abordamos é discutido em, por exemplo [1], [2], embora não com tantos detalhes como aqui. Entretanto, no desenvolvimento das soluções, tanto quanto este autor saiba, o círculo de Apolônio quase nunca é mencionado e empregado explicitamente. Uma exceção é a referência [3]. O uso explícito da geometria do círculo de Apolônio justifica a solução matemática do problema, resta, porém, a escolha física da distribuição da carga ou cargas imagem. Veja, por exemplo, o comentário ilustrativo a esse respeito no excelente texto de Griffiths [1], que, em tradução do autor desta nota, se lê:

A solução recém apresentada é deliciosamente simples, mas também extraordinariamente afortunada. Há tanto de arte como de ciência no método das imagens, pois você [isto é, o estudante] deve conceber de alguma forma o “problema auxiliar correto”. Dúvido que a primeira pessoa a resolver o problema da carga puntiforme e da esfera condutora soubesse de antemão que carga imagem usar e onde colocá-la. Presumivelmente, ele (ou ela?) começaram com uma carga arbitrária em um ponto arbitrário dentro da esfera, calcularam o potencial da esfera e depois descobriram que com q' e a corretos... o potencial da esfera seria zero.

Um exemplo (mais complexo) que ilustra o espírito com que o comentário acima deve ser lido é dado em [4] onde a interação eletrostática entre uma esfera condutora e um dipolo elétrico é estudada. Nesse exemplo, a escolha de um dipolo imagem e uma carga imagem puntiforme são sugeridos pela física do problema.

Agradecimentos

O autor agradece ao *referee* pelos comentários e sugestões que ajudaram-no a melhorar esta nota.

Referências

- [1] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Prentice Hall, Upper Saddle River, 1989), 2nd ed.
- [2] P. Lorrain, D.R. Corson and F. Lorrain, *Fundamentals of Electromagnetic Phenomena* (Freeman, New York, 2000).
- [3] P. Gnädig, G. Honyek and K. Riley, *200 Puzzling Physics Problems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001), Problema 92.
- [4] F.C. Santos e A.C. Tort, *European Journal of Physics* **25**, 859 (2004).