

Las cargas y los campos que rodean un circuito y los ejemplos de J.H. Poynting sobre la transferencia de energía electromagnética

(*The charges and fields around a circuit and the examples of J.H. Poynting on electromagnetic energy transfer*)

Maricel Matar y Reinaldo Welti¹

Laboratorio de Vibraciones y Ondas, Departamento de Física, Universidad Nacional de Rosario, Rosario, Argentina
Recibido em 14/7/2010; Aceito em 20/1/2011; Publicado em 21/3/2011

Se revisan dos de los ejemplos sobre el transporte de energía en circuitos de corriente continua propuestos por J.H. Poynting en 1884: un alambre recto que transporta una corriente y la descarga de un condensador a través de un alambre. En particular se analiza si algunas de las hipótesis que Poynting hace en estos ejemplos se deben a que en esa época se ignoraba el rol de la carga superficial sobre los conductores resistivos en la comprensión del transporte de energía. Se presenta también una solución analítica para el flujo de energía en la descarga de un condensador a través de un conductor resistivo.

Palabras-clave: cargas superficiales, campo eléctrico, flujo de energía.

We review two examples on the transport of energy in DC circuits proposed by J.H. Poynting in 1884: a straight wire carrying a current and a capacitor discharge through a wire. In particular we analyze whether some of the Poynting hypothesis in these examples are due to at that time was unaware the role of surface charge on the resistive conductors in the understanding of energy transport. We also present an analytical solution for the flow of energy in the discharge of a capacitor through a resistive conductor.

Keywords: surface charges, electric field, energy flow.

1. Introducción

El espacio que rodea un circuito eléctrico puede ser considerado como una región donde la energía se transforma, en ciertos puntos, en campos eléctricos y magnéticos por medio de baterías, generadores, etc., mientras que en otras partes esta energía se transforma en calor o trabajo mecánico. El vector de Poynting conceptualiza y cuantifica el transporte de energía por el campo electromagnético y es generalmente utilizado en los cursos universitarios de pregrado como una forma de representar el flujo de energía de una onda electromagnética. Sin embargo, también puede ser útil para representar el flujo de energía en un circuito de corriente continua. Precisamente, J.H. Poynting (J.H.P.) [1,2], en sus trabajos de 1884 y 1885, donde expone por primera vez la transferencia de energía electromagnética por medio de los campos, presenta ejemplos que se refieren a circuitos de corriente continua. En los últimos veinte años numerosos autores [3-15], aunque algunos mucho antes, como Sommerfeld [16], señalaron que para alcanzar una buena comprensión del proceso de transferencia de energía, vía el vector de Poynting, en un circuito de corriente continua, es neces-

sario conocer el campo eléctrico en las proximidades de los conductores resistivos por los que circula una corriente. Específicamente, demostraron que estos campos están determinados por la carga superficial sobre los conductores que transportan la corriente. Esto era desconocido en la época de J.H.P. y, por lo tanto, cuando utiliza su teorema para estudiar la transferencia de energía en circuitos de corriente continua hace algunas suposiciones muy especiales para obtener el resultado esperado.

En la sección 2 de este trabajo, presentamos una traducción de dos de los ejemplos propuestos por J.H.P. en su publicación de 1884. En la sección 3, analizamos el primer ejemplo dado por J.H.P. y mostramos las dificultades con que se encontró por desconocer la naturaleza del campo eléctrico que rodea a un conductor por el que circula una corriente. También exponemos las críticas que hace O. Heaviside [17,18] a uno de sus ejemplos. En la sección 4 mostramos, mediante una simple deducción, que la carga superficial de los conductores provee dos tipos de campo eléctrico: el campo adentro del conductor que impulsa la corriente de conducción de acuerdo a la ley de Ohm y el campo afuera del alambre, que tiene una componente normal y otra tangencial a la

¹E-mail: welti@fceia.unr.edu.ar.

superficie del alambre. El campo eléctrico externo genera, conjuntamente con el campo magnético que rodea el conductor, el flujo de Poynting. En la sección 5 analizamos el segundo ejemplo de J.H.P. y en la sección 6 lo resolvemos, con más detalle y sin suposiciones especiales aunque modificando la geometría para hacerla matemáticamente accesible.

2. Aplicaciones de la ley de transferencia de energía propuestas por Poynting

A continuación presentamos dos de los ejemplos proporcionados por J.H.P. (las figuras son del texto original) sobre la transferencia de la energía en su trabajo de 1884. Se han realizado cambios menores para adaptar los símbolos de las magnitudes físicas a las actuales.

(1) Un alambre recto que transporta una corriente

En este caso, muy cerca del hilo y dentro de él, las líneas de fuerza magnética son círculos alrededor del eje del alambre. Las líneas de fuerza eléctrica están a lo largo del alambre, si consideramos como probado que el flujo a través de áreas iguales de la sección transversal es la misma en todas las partes de la sección. Si AB, Fig. 1, representa el alambre, y la corriente es de A a B, entonces un plano tangente a la superficie en cualquier punto contiene las direcciones de las intensidades electromotriz y magnética (designadas en lo que sigue por I.M.E. e I.M. respectivamente), y la energía, por lo tanto, fluye perpendicularmente a través de la superficie, esto es, en dirección radial hacia el eje. Consideraremos una porción del alambre limitada por dos secciones planas perpendiculares al eje. A través de sus extremos ninguna energía está fluyendo, porque ella no contiene ninguna componente de la I.M.E. La totalidad de la energía entra entonces a través de la superficie externa del alambre y por el teorema general la cantidad de energía que entra debe dar cuenta del calor que se desarrolla en la resistencia ya que la corriente es estacionaria y no hay ninguna otra alteración de la energía. Vale la pena, quizás, mostrar que en este caso la energía que entra de acuerdo al teorema general es justo la cantidad de calor que se desarrolla. Sea a el radio del alambre, I la corriente a lo largo del mismo, H el campo magnético en la superficie, E el campo eléctrico en cualquier punto dentro del alambre y V la diferencia

de potencial entre los extremos. El área del alambre de longitud l es $2\pi al$ y la energía que entra desde el exterior por segundo es

$$\begin{aligned} EH \times \text{área} &= 2\pi alEH = 2\pi aHEl \\ &= \frac{2\pi aIEl}{2\pi a} = VI \end{aligned}$$

Por la ley de Ohm, $V = IR$, entonces, $IV = I^2R$, que es el calor disipado de acuerdo a la ley de Joule.

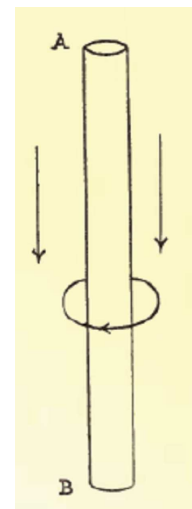


Figura 1 -

Parece entonces que la energía de una corriente no viaja a lo largo del alambre, sino que esta viene desde el medio que rodea al alambre y que ni bien entra comienza a transformarse en calor, la cantidad que cruza las capas sucesivas del alambre decrece hasta que llega al centro, donde no hay ningún campo magnético y por lo tanto no hay energía que pase, todo ha sido transformado en calor. Una corriente de conducción puede decirse que consiste en este flujo de energía hacia adentro con su correspondiente campos magnético y eléctrico y la transformación de energía en calor dentro del conductor.

Examinaremos ahora cómo la energía viaja a través del medio en su camino hacia el alambre donde se disipa en forma de calor

(2) Descarga de un condensador a través de un alambre

Si consideramos el caso de la descarga lenta de un simple condensador, consistente en dos placas paralelas conectadas mediante un alambre de gran resistencia, podemos hacernos una idea aproximada del camino de la energía.

Sean A y B, Fig. 2, las dos placas del condensador, A está cargada positivamente y B negativamente. Antes que comience la descarga las secciones de las superficies equipotenciales serán como se indica en la figura. La parte principal de la energía reside en el dieléctrico entre las dos placas, pero habrá alguna energía donde haya campo eléctrico. Entre A y B, el campo eléctrico va desde A hacia B y en todas partes es perpendicular a las superficies equipotenciales. Ahora conectamos A y B por medio de un alambre muy delgado LMN, de una resistencia muy grande, con una forma tal que sigue una línea de fuerza y con una resistencia por unidad de longitud que se ajusta para que sea la misma para la misma caída de potencial a través del hilo. Se hace esta suposición sobre la resistividad del hilo para que las superficies de nivel no se perturben por el flujo de la corriente. El alambre se supone que es tan fino que la descarga tiene lugar muy lentamente.

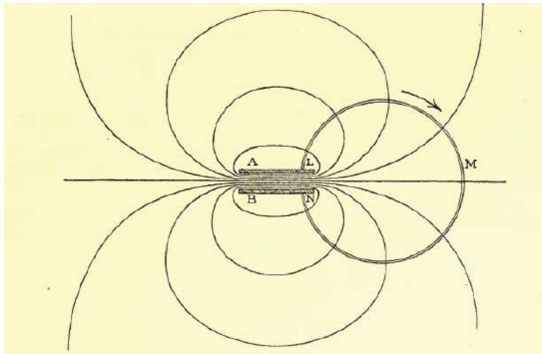


Figura 2 -

Mientras la corriente fluye alrededor de LMN en la dirección indicada en la flecha, se tendrá también una corriente de desplazamiento desde A hacia B debido a la variación temporal del campo eléctrico. Las líneas de campo magnético forman curvas cerradas que rodean el circuito, son entrantes en el interior de la espira y salientes en el exterior de la espira. El campo eléctrico va siempre desde las superficies de alto nivel – aquellas más cercas de A, a las más bajas – aquellas más cercas de B, tanto en la zona en que se encuentra el alambre como en el espacio entre A y B.

Ahora, como la energía siempre se mueve perpendicularmente a las líneas de campo eléctrico ésta debe viajar a lo largo de las líneas equipotenciales que se muestran en la Fig. 2. Como también se mueve perpendi-

cularmente a las líneas de campo magnético, se mueve como vimos en el ejemplo (1), hacia adentro, sobre todos los lados del alambre, y se disipará en forma de calor – si suponemos que la descarga es tan lenta que la corriente se mantiene estacionaria durante el tiempo considerado. Pero entre A y B la dirección del campo eléctrico es opuesta a la corriente, mientras que el campo magnético tiene la misma relación a la corriente como en el alambre. Recordando que el campo eléctrico, el campo magnético, y la dirección del flujo de energía están conectados por la regla de la mano derecha, vemos que la energía se mueve hacia fuera del espacio entre A y B. Cuando la tensión del dieléctrico entre A y B es gradualmente liberada por la corriente de descarga, a lo largo del alambre LMN, la energía entregada de esta manera viaja hacia fuera a través del espacio, siguiendo siempre líneas equipotenciales y gradualmente converge una vez más sobre el circuito donde las superficies equipotenciales son cortadas por el alambre. Allí la energía se transforma en calor. Es de notar que si la corriente puede ser considerada estacionaria la energía se moverá siempre a lo largo de la misma línea de nivel

3. Observaciones sobre el ejemplo (1) de J.H. Poynting

El ejemplo (1) de J.H.P. se utiliza, prácticamente sin variantes, en la mayoría de los ejemplos de la transferencia de energía que se dan actualmente en los textos de física como, por ejemplo, en las Lecciones de Física de Feynman [19].

Tanto Feynman como J.H.P. presumen que el campo eléctrico es *siempre* paralelo al alambre. Adentro del alambre esto es correcto pues la densidad de corriente y el campo eléctrico son paralelos ($\mathbf{J} = \mathbf{E}/\rho$ donde ρ es la resistividad del alambre) y ambos tangentes a la superficie del alambre. Con esta suposición para el campo externo \mathbf{E} , combinado con la existencia de un campo magnético circular alrededor del alambre, encuentran que el vector $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ es perpendicular a la superficie del alambre en todos sus puntos. Sin embargo, Heaviside [17], un contemporáneo de Poynting que descubrió el flujo de energía del campo electromagnético de manera independiente [18] señaló que solamente una pequeña componente del vector de Poynting en el exterior se dirige hacia el interior del alambre y el resto de $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ es paralelo al alambre. Heaviside [17] se refiere al tema de esta forma:

La transferencia de energía tiene lugar, en la vecindad del alambre, casi paralelamente

al mismo, con una pequeña tangente hacia el alambre... El Prof. Poynting [1985], por otra parte, propuso una visión diferente, representando la transferencia de energía casi perpendicularmente al alambre, *i.e.*, con una pequeña desviación de la vertical. Pienso que esta diferencia de un cuadrante surge solamente de lo que parece ser una idea equivocada de su parte sobre cómo es la naturaleza del campo eléctrico en la vecindad de un alambre por el que circula una corriente. Las líneas fuerza del campo eléctrico son casi perpendiculares al alambre...

Es probable que Heaviside haya llegado a esta conclusión inducido por sus estudios sobre las líneas de transmisión. En efecto, una línea de transmisión eléctrica (por ejemplo una línea formada por un par de hilos) funciona como una guía que transporta la energía desde el generador hasta un dispositivo distante donde se disipa o se transforma en otro tipo de energía. El flujo de energía, por lo tanto, debe ser casi paralelo a los conductores de la línea de transmisión. La pequeña componente que se dirige hacia los hilos de la línea y se introduce en su interior es para compensar la pérdida óhmica causada por su resistividad. En el alambre $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ está totalmente dirigido hacia adentro y representa la energía disipada en calor Joule. En consecuencia, toda la energía que se propaga a lo largo de la dirección de los alambres fluye afuera de los alambres. Los comentarios de Heaviside han sido solamente cualitativos [16] pues no se introdujo en los detalles matemáticos del problema. Esta cuestión, como veremos a continuación, puede resolverse si se utiliza un modelo más adecuado para la corriente eléctrica y el campo eléctrico que rodea a un conductor que transporta una corriente.

4. Los campos y la carga superficial que rodean un conductor

En la Fig. 3 se muestra un cable coaxil de longitud l , radio interno a y externo b . El conductor interno es macizo y tiene una resistividad ρ mientras que el externo es perfectamente conductor. Uno de sus extremos ($z = 0$) está cortocircuitado, mientras que el otro ($z = -l$) está conectado a una tensión continua V .

En una primera aproximación si $l \gg a$ y la resistividad del conductor central es muy pequeña, el campo eléctrico, en la región $-l \ll z \ll 0$, tiene solamente una componente radial E_r que viene dada por

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r}, \quad (1)$$

donde λ y σ son la densidad de carga por unidad de longitud y la carga superficial del conductor central que

están relacionadas entre sí por la relación $\lambda = 2\pi a\sigma$.

Observemos que si el hilo central es resistivo, entonces la diferencia de potencial entre el conductor central y el conductor externo varía con z . Esta diferencia de potencial, de acuerdo a la ley de Ohm, viene dada por

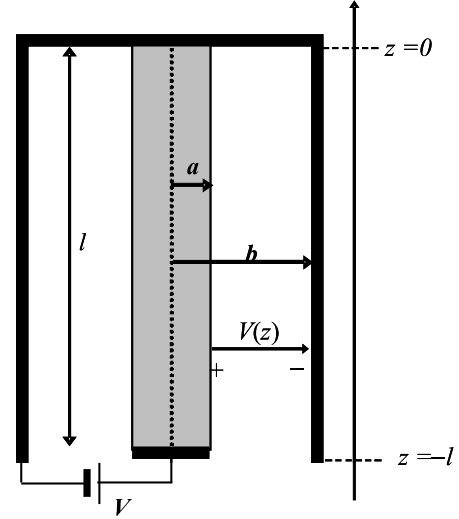


Figura 3 - Cable coaxil de longitud l formado por un conductor interno resistivo de radio a , y por un conductor externo perfecto de radio b .

$$V(z) = R(z)I, \quad (2)$$

donde $R(z)$ es la resistencia del cable coaxil de longitud $-z$ ($z < 0$) que coincide con la resistencia del conductor central de la misma longitud pues el conductor externo no tiene resistencia y el conductor interno y el externo están cortocircuitados en $z = 0$. Esta resistencia viene dada por

$$R(z) = -\frac{\rho z}{\pi a^2}. \quad (3)$$

La diferencia de potencial entre el hilo y el conductor de retorno y la componente radial del campo están relacionadas a través de la expresión

$$V(z) = \int_a^b E_r dr = \frac{a\sigma}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (4)$$

Si igualamos (4) con (2) y (3) encontramos que la carga superficial sobre el conductor resistivo central debe ser igual a

$$\sigma = -\frac{\epsilon_0 \rho I z}{\pi a^3 \ln(b/a)}. \quad (5)$$

Observemos que σ varía linealmente con z , es máxima en $z = -l$ y se anula en $z = 0$. Reemplazando (5) en (1) obtenemos

$$E_r = -\frac{\rho I z}{\pi a^2 r \ln(b/a)} \quad a < r < b. \quad (6)$$

Nos encontramos ahora con un problema: si la componente radial del campo eléctrico (6) varía con z , no se puede satisfacer en el interior del coaxil la ecuación $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Esta ecuación se puede satisfacer solamente si existe una componente z del campo eléctrico de modo que

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{\partial E_r}{\partial z} = \frac{a}{\varepsilon_0 r} \frac{d\sigma}{dz} = -\frac{\rho I}{\pi a^2 \ln(b/a)} \frac{1}{r}. \quad (7)$$

Integrando, obtenemos

$$E_z(r) = -\frac{\rho I}{\pi a^2 \ln(b/a)} \ln r + C. \quad (8)$$

Como $E_z(r = b) = 0$, obtenemos finalmente

$$E_z(r) = \frac{\rho I \ln(b/r)}{\pi a^2 \ln(b/a)} \quad a \leq r \leq b. \quad (9)$$

Las componentes radial (6) y axial (9) del campo eléctrico satisfacen las condiciones de borde en las superficies cilíndricas, $r = a$ y $r = b$, y sobre la superficie perfectamente conductora que cierra el coaxil en $z = 0$. Por lo tanto, por el teorema de existencia y unicidad este campo eléctrico es la solución de nuestro problema.

En $r = a$ la componente tangencial al conductor interno es

$$E_z(r = a) = \frac{\rho I}{\pi a^2} = \rho J. \quad (10)$$

Como la componente tangencial del campo eléctrico debe ser continua, se tiene que en el interior del conductor central el campo eléctrico es

$$E_z(r) = \frac{\rho I}{\pi a^2} = \rho J_z \quad 0 < r < a. \quad (11)$$

Observemos que la ecuación (11) es la expresión de la ley de Ohm en el interior del conductor.

En conclusión, la carga superficial sobre la superficie del conductor central provee dos tipos de campo eléctrico: el campo adentro del conductor (11) que impulsa la corriente de conducción de acuerdo a la ley de Ohm y el campo afuera del conductor resistivo central, que tiene una componente radial (6) y otra paralela (9) a la superficie del alambre.

Este simple detalle de las cargas superficiales son las que crean el campo que ha sido inadvertido, no solo por J.H.P., sino también por Feynman [18] quien, después de calcular el flujo normal del vector de Poynting sobre la superficie de un cilindro que transporta corriente hace el siguiente comentario:

los electrones en el interior del conductor son impulsados por un campo eléctrico que ha sido creado por *cargas eléctricas que están muy lejos* y la energía que adquieren estos electrones se transforma finalmente en calor... (énfasis agregado)

Feynman no dice dónde se encuentran las cargas, afirma solamente que están lejos. ¿Está sugiriendo que son las cargas que se encuentran en los bornes de la batería que alimenta el circuito?

El campo magnético en el cable coaxil es

$$(a) \quad H_\theta = \frac{Ir}{2\pi a^2} \quad 0 < r \leq a, \quad (12)$$

$$(b) \quad H_\theta = \frac{I}{2\pi r} \quad a < r < b,$$

mientras que para $r > b$, $H_\theta = 0$. El salto de H_θ en la superficie $r = b$ se debe a la corriente de retorno que fluye sobre el cilindro de radio b .

Los campos eléctricos externos, (6) y (9), y el interno (11), generan, conjuntamente con el campo magnético (12) el flujo de Poynting.

Se constata que el vector de Poynting en el conductor resistivo central es puramente radial, mientras que en el exterior tiene componentes radial y otra paralela al conductor. Refiriéndose a este resultado Sommerfeld [16] afirma:

... los metales son buenos conductores de la corriente pero no buenos conductores de la energía. Los metales conducen la corriente pero el espacio que los rodea conduce la energía y el mejor conductor de la energía es ¡el vacío!

Este comentario de Sommerfeld es parecido al de Heaviside [17], que citamos en la sección 3. En el texto de Sommerfeld [16] y en [12] se calculan los campos y la carga superficial en un cilindro conductor resistivo por el que circula una corriente resolviendo la ecuación de Laplace para el potencial con condiciones de contorno apropiadas y en [16] se muestra una excelente figura que muestra al flujo de energía alrededor del cable. En [8] se estudia la carga superficial y los campos que rodean al prototipo de las líneas de transmisión eléctrica: el par de hilos.

5. Observaciones sobre el ejemplo (2) de J.H. Poynting

El segundo ejemplo de J.H.P. ofrece varios aspectos interesantes para ser analizados. En primer lugar, elige la forma del alambre LMN de modo que coincida exactamente con una línea de fuerza del campo eléctrico creado por las cargas eléctricas que se encuentran en las superficies externas del capacitor. En esta situación, como el campo eléctrico es paralelo al hilo deduce que éste penetra en su interior (continuidad de la componente paralela del campo eléctrico). Como el campo eléctrico toma diferentes valores a lo largo del hilo, debe ajustar su resistencia por unidad de longitud para que se cumpla la ley de Ohm en cada segmento del circuito.

En efecto, en un tramo de longitud Δl , la ley de Ohm impone que

$$\Delta V = E\Delta l = \frac{\rho\Delta l}{S}I, \quad (13)$$

donde E y ρ son el campo eléctrico y la resistividad en ese tramo del hilo, S es la sección del hilo e I es la corriente que circula a lo largo del circuito. La ecuación (13) impone que la resistividad debe estar relacionada con el campo eléctrico a través de la ecuación

$$\rho = \frac{ES}{I}. \quad (14)$$

La corriente I es la misma en todos los puntos del alambre y si suponemos que S es una constante, entonces la conductividad del hilo debe ser proporcional al módulo del campo creado por las cargas que se encuentran sobre la superficie externa del capacitor. Con estas suposiciones las superficies equipotenciales (o líneas de nivel) no se perturban por el flujo de la corriente. Como el campo eléctrico es normal a las líneas equipotenciales, concluye que las líneas de nivel mostradas en la Fig. 2, coinciden con las líneas de flujo de la energía que van desde el capacitor hacia el alambre. Cuando las líneas equipotenciales y, por lo tanto, las líneas de flujo de la energía, llegan a la superficie del alambre éstas son normales a la misma en concordancia con lo que ocurre en el ejemplo (1). El flujo de energía electromagnética se disipa finalmente en calor Joule en el interior del hilo.

Una pregunta que podría hacerse a J.H.P. es por qué no considera un alambre de forma cualquiera (no coincidente con una línea de campo eléctrico) y de resistividad constante. En este caso, ley de Ohm requiere que el campo eléctrico tenga módulo constante y dirección paralela al hilo. Pero, en esta situación, ¿dónde están las cargas que crean este campo eléctrico de módulo constante en todo punto del alambre y paralelo al mismo? J.H.P. atribuye al hilo LMN propiedades muy especiales para que el campo eléctrico en su interior sea el creado por cargas que están, *muy lejos* como dice Feynman [19], sobre la superficie externa del capacitor. En un hilo de resistividad uniforme y de forma cualquiera el campo en su interior es creado por cargas superficiales que, como vimos en la sección 4, están *muy cerca*.

6. Descarga de un capacitor a través de un conductor cilíndrico

Si intentamos resolver la ecuación de Laplace para el potencial electrostático en la geometría de la Fig. 2 tendríamos que tratar con las condiciones de contorno sobre la superficie toroidal del hilo de radio finito. En principio el problema puede ser resuelto usando métodos numéricos, pero la geometría del contorno y la tridimensionalidad lo hacen muy difícil. El campo magnético también debe resolverse si se desea encontrar el flujo del vector de Poynting.

Por estos motivos, vamos a restringir nuestra consideración a un problema análogo bidimensional. Interpretaremos el esquema de la Fig. 2 como la representación de la sección transversal de un dispositivo compuesto por un capacitor que está conectado a un cilindro muy largo como el que se muestra en la Fig. 4. La distancia d entre las placas A y B del capacitor son muy pequeñas ($d \ll a$). La superficie cilíndrica LMN tiene un radio a , espesor e y resistividad ρg constante. Se carga el capacitor hasta que la diferencia de potencial entre las placas sea V_0 . Cuando se conecta la superficie cilíndrica resistiva a las placas del capacitor comenzará a circular una corriente. Este problema, desde el punto de vista de la teoría de circuitos, es la descarga de un capacitor en un circuito RLC . Vamos a suponer que la resistencia del cilindro es muy grande de modo que el régimen sea sobreamortiguado. En esta situación la descarga será muy lenta y la corriente se mantendrá relativamente constante en un cierto intervalo de tiempo.

El capacitor está localizado en $\theta \approx \pm\pi \mp d/2a$ (si suponemos que la distancia entre placas, d es muy pequeña comparada con a) y sus placas están a los potenciales $\pm V_0/2$ como se muestra en la Fig. 5.

Este problema, a diferencia del tratado en las referencias [3,20] sólo puede ser resuelto analíticamente en el interior del cilindro. Pero si $w \gg a$, el campo magnético y por lo tanto, el vector de Poynting, son no nulos solamente en el interior del cilindro y como nuestro objetivo es mostrar cómo se realiza el transporte de energía desde el interior del capacitor hacia el conductor resistivo esta limitación no es importante.

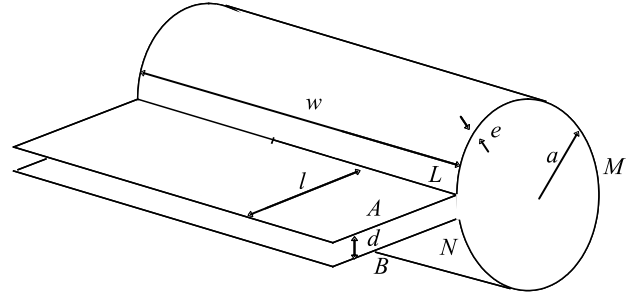


Figura 4 - Las placas A y B del capacitor están conectadas al cilindro resistivo LMN cuya superficie tiene un ancho e .

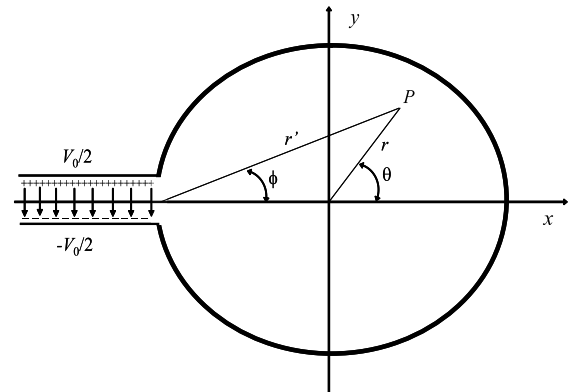


Figura 5 - Sistemas de coordenadas polares: (r, θ) con origen en $(0,0)$ y el (r', ϕ) con origen en $(ta, 0)$.

Para encontrar el potencial y el campo en todo punto del espacio resolveremos la ecuación de Laplace con las condiciones de borde apropiadas. Utilizamos un sistema de coordenadas cilíndrica convencional r, θ, z con su eje coaxial con la del cilindro como se muestra en la Fig. 5. En esa figura r', ϕ son las coordenadas polares con centro en $x = -a, y = 0$.

De acuerdo con la ley de Ohm, el potencial en el cilindro resistivo es

$$\Phi(r; \theta) = \frac{V_0 \theta}{2\pi} \quad (-\pi < \theta < \pi, \quad a \leq r \leq a+e) \quad (15)$$

La solución de la ecuación de Laplace, en el interior del cilindro, que no diverge en cero viene dada por

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k \text{sen}(k\theta) \quad (0 \leq r < a) \quad (16)$$

La condición de borde (1), en $r = a$, permite determinar los coeficientes A_k de modo que el potencial adentro del cilindro viene dado por

$$\Phi(r < a, \theta) = -\frac{V_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-r/a)^k \text{sen}(k\theta)}{k} \quad (17)$$

Esta serie puede escribirse en forma cerrada [21]

$$\begin{aligned} \Phi(r < a; \theta) &= \left(\frac{V_0}{\pi}\right) \arctan [r \text{sen}\theta / (a + r \cos \theta)] \\ &= \left(\frac{V_0}{\pi}\right) \arctan [y / (a + x)] = \left(\frac{V_0}{\pi}\right) \phi, \end{aligned} \quad (18)$$

donde ϕ , en (18), es el ángulo polar de un radio vector con origen en $x = -a, y = 0$ como se muestra en la Fig. 5.

Adentro del cilindro las equipotenciales son los planos, $\phi = \text{cte.}$, de acuerdo con la forma final de la ecuación (5). En la Fig. 6 se muestra una familia de equipotenciales en el interior del cilindro. El campo eléctrico en cualquier punto se encuentra calculando el gradiente del potencial. Observemos que las líneas de fuerza, perpendiculares a las superficies equipotenciales, son circunferencias con centro en $x = -a, y = 0$ y, por lo tanto, tienen una componente paralela a la superficie del cilindro.

Las componentes del campo eléctrico en el interior del cilindro son

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{V_0}{\pi} \frac{(r + a \cos \theta)}{r'^2} \quad r \leq a \quad (19)$$

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{V_0}{\pi} \frac{a \text{sen}\theta}{r'^2} \quad r \leq a. \quad (20)$$

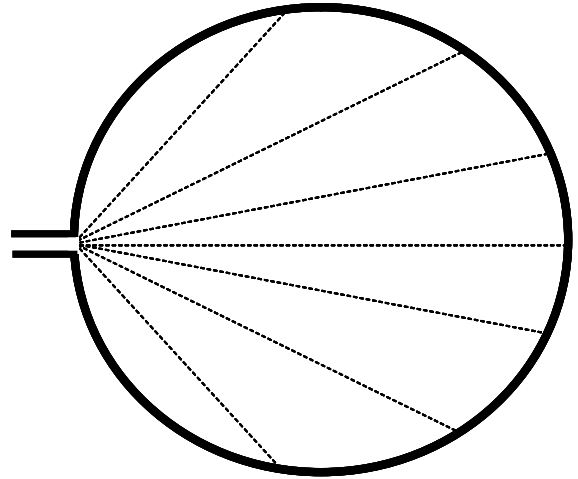


Figura 6 - Equipotenciales para una corriente que circula sobre una superficie cilíndrica con resistencia distribuida. El capacitor, cuya distancia entre placas es muy pequeña, está en la izquierda. Las líneas equipotenciales también pueden ser interpretadas como las líneas del flujo de Poynting.

El módulo del campo eléctrico en el interior del cilindro es

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{E_\theta^2 + E_r^2} = \frac{V_0}{\pi r'}. \quad (21)$$

En un punto cualquiera ($r = a, \theta$) de la superficie del cilindro, la componente tangencial es

$$E_\theta(r = a, \theta) = -\frac{V_0}{2\pi a}, \quad (22)$$

y la componente normal es

$$E_r(r = a, \theta) = -\frac{V_0}{2\pi a} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{V_0}{2\pi a} \tan \phi. \quad (23)$$

La componente tangencial a la superficie del cilindro, penetra en la capa de espesor e de modo que

$$E_\theta(r, \theta) = -\frac{V_0}{2\pi r} \quad a \leq r \leq a + e. \quad (24)$$

El vector densidad de corriente es, por lo tanto,

$$J_\theta(r, \theta) = -\frac{\rho V_0}{2\pi r} \quad a \leq r \leq a + e. \quad (25)$$

Si designamos con I_0 a la corriente total que fluye en el sentido horario en el interior de la capa, tenemos que

$$I_0 = -\int_S J_\theta ds = -\int_a^{a+e} J_\theta w dr. \quad (26)$$

donde S es cualquier sección transversal de la capa. Si introducimos (25) en (26) obtenemos

$$I_0 = \frac{V_0}{R}, \quad (27)$$

donde

$$R = \frac{\rho 2\pi}{w \ln(1 + e/a)}, \quad (28)$$

es la resistencia de la capa cilíndrica (para corrientes en la dirección θ)

Si $e/a \ll 1$,

$$R = \frac{\rho 2\pi}{we/a} = \frac{\rho 2\pi a}{we} \quad (29)$$

La densidad de carga superficial en la superficie interna del cilindro es

$$\sigma_i(\theta) = -\varepsilon_0 E_r(r = a, \theta) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{2\pi a} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{2\pi a} \tan \phi, \quad (30)$$

donde ϕ es el ángulo polar de un radio vector con origen en $x = -a$, $y = 0$. Si $e \ll a$ la misma densidad de carga superficial debe existir sobre la superficie externa del cilindro. Estas son las cargas superficiales que crean los campos eléctricos (19) y (20). En la Fig. 7 se muestra la gráfica de σ_i en función de θ en unidades de $\sigma_0 = \varepsilon_0 V_0 / 2\pi a$. Observemos que no varía linealmente a lo largo del perímetro del conductor resistivo, como en el caso del cilindro recto de la sección 4. Como es una función tangente incrementa no linealmente en las cercanías de la batería. Sin embargo, en un entorno de $\theta = 0$ es aproximadamente lineal.

El campo magnético de este ejemplo es el de un solenoide infinito con un espesor e : la magnitud del campo es uniforme y su dirección es normal (hacia fuera) a la figura en $r \leq a$, decrece linealmente desde $r = a$ hasta hacerse cero en $r = a + e$, y es nulo para $r \geq a + e$.

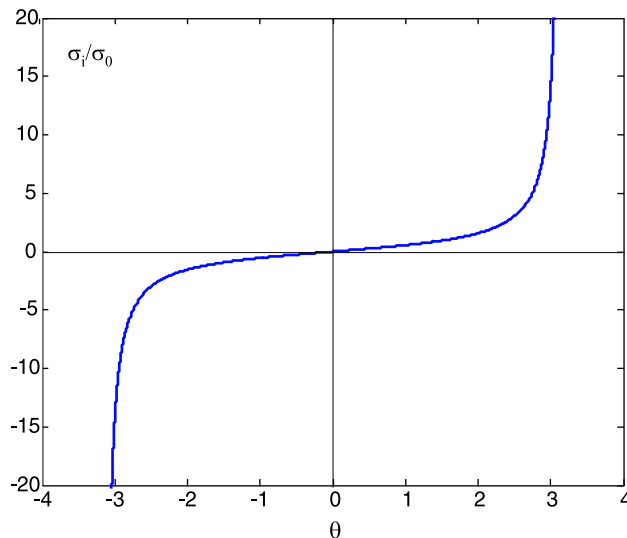


Figura 7 - Gráfica de σ_i en función de θ , en unidades de σ_0 .

$$H_z = -\frac{I}{w} \quad r \leq a, \quad (31)$$

$$H_z = -\frac{I}{w} \frac{[(a+e) - r]}{e} \quad a \leq r \leq a + e.$$

El vector de Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ está en el plano xy , es ortogonal a las líneas del campo \mathbf{E} y, coincide entonces con las equipotenciales. Esto significa que podemos interpretar a las equipotenciales de la Fig. 6 como las líneas del flujo de Poynting. El sentido del vector es desde el interior del capacitor hasta cada uno de los elementos resistivos del cilindro. En el interior de la capa resistiva el campo eléctrico tiene una componente θ constante, por lo tanto, el vector de Poynting es radial. Esta componente radial, debido a la variación del campo magnético con r (ecuación (31)) disminuye linealmente hasta hacerse cero en la superficie externa del cilindro.

El campo eléctrico entre las placas del capacitor es $E_y = -V_0/d$, mientras que el campo magnético en el interior del cilindro es $H_z = -I_0/w$. El vector de Poynting, en $x = -a$, $y = 0$, en el extremo derecho del capacitor es

$$P_{cx} = E_y H_z = (-1) \frac{V}{d} (-1) \frac{I}{w} = \frac{VI}{dw}, \quad (32)$$

La potencia total que sale del capacitor, a través de su superficie lateral de área dw , y penetra en el interior del cilindro es

$$W_c = P_{cx}(dw) = VI, \quad (33)$$

La componente normal $P_r(r = a, \theta)$ del vector de Poynting en la superficie del cilindro es

$$P_r(r = a, \theta) = E_\theta(r = a, \theta) H_z = \frac{VI}{2\pi a w}, \quad (34)$$

La potencia total que entra en la capa resistiva del cilindro se obtiene integrando (34) a través de la superficie interna del cilindro

$$W_d = P_r(r = a, \theta)(2\pi a w) = VI, \quad (35)$$

En conclusión, la potencia que se disipa en el cilindro resistivo es la energía que estaba almacenada en el interior del capacitor.

A pesar que los cálculos que presentamos en esta sección son solamente para un caso bidimensional (cilíndrico), los resultados permiten hacerse una idea de la distribución de carga, superficies equipotenciales, campos eléctrico y magnético y el flujo del vector de Poynting para cualquier circuito de corriente simple en el espacio tridimensional. En particular, este ejemplo permite enfatizar el rol del flujo del vector de Poynting como el transportador de la energía desde el interior del capacitor, que actúa en este caso como fuente, hacia los

elementos del resistor que actúan como sumideros. El campo eléctrico producido por las cargas superficiales sobre los hilos es el mecanismo por el cual el flujo de Poynting penetra hacia el interior de los hilos resistivos donde se disipa la energía.

7. Conclusión

Examinamos en este trabajo dos ejemplos sobre la transferencia de energía en circuitos eléctricos dados por J.H.P. y señalamos las críticas que hace Heaviside de las supuestas “ideas incorrectas” de J.H.P. sobre la naturaleza de los campos que rodean un conductor que transporta una corriente. Desde hace unos años sabemos que para usar el vector de Poynting, en el cálculo de la transferencia de energía en circuitos de corriente continua, es necesario conocer la carga superficial sobre los conductores que transportan corriente, puesto que estas son las fuentes que crean el campo eléctrico en el exterior y en el interior de los mismos. Esto era desconocido no solamente en la época de Poynting sino que es actualmente ignorado por muchos profesores y aun investigadores de física. En la sección 3 nos referimos a los comentarios de Feynman cuando analiza en su texto [19] uno de los ejemplos dados por J.H. Poynting. Jackson [7] afirma que luego de una somera inspección de textos básicos, intermedios y avanzados [19, 20, 22-37] en la Biblioteca de Física de Berkeley encuentra que entre los textos básicos solamente el libro de Chabay y Sherwood [27] menciona las cargas superficiales sobre los conductores resistivos y entre los textos intermedios y avanzados sólo el libro de Jefimenko [20].

Transcurridos quince años de este comentario de Jackson y, a pesar de los numerosos artículos y conferencias que exaltan las conveniencias de utilizar las cargas superficiales para unificar la electrostática con los circuitos, la inclusión de este tema en libros de textos y su empleo en el aula es casi nula. En la mayoría de los textos se sigue presentando el balance de energía de manera contable: la energía que entrega la fuente se disipa en la resistencia.

Referencias

- [1] J.H. Poynting, Trans. Roy. Soc. London **A175**, 277 (1884).
- [2] J.H. Poynting, Trans. Roy. Soc. London **A176**, 278 (1885).
- [3] M.A. Heald, Am. J. Phys. **52**, 522 (1984).
- [4] H. Härtel, in: *Aspects of Understanding Electricity: Proceedings of an International Conference*, edited by R. Duit, W. Jung and C. von Rhöneck (PN/Schmidt & Klaunig, Kiel, 1985).
- [5] H. Härtel, *Report #IRL87-0001* (Institute for Research on Learning Palo Alto, Palo Alto, 1987).
- [6] J.M. Aguirregabiria, A. Hernandez and M. Rivas, Am. J. Phys. **60**, 138 (1992).
- [7] J. D. Jackson, Am. J. Phys. **64**, 855 (1996).
- [8] A.K.T. Assis e A.J. Mania, Revista Brasileira de Ensino de Física **21**, 469 (1999).
- [9] S. Majcen, R.K. Haaland and S.C. Dudley, Am. J. Phys. **68**, 857 (2000).
- [10] N.W. Preyer, Am. J. Phys. **68**, 1002 (2000).
- [11] J.A. Hernandez and A.K.T. Assis, Am. J. Phys. **71**, 938 (2003).
- [12] G.F. Leal Ferreira e M.T. de Figueiredo, Revista Brasileira de Ensino de Física **25**, 374 (2003).
- [13] R. Welti, Revista Brasileira de Ensino de Física **27**, 577 (2005).
- [14] I. Galili and E. Goihbarg, Am. J. Phys. **73**, 141 (2005).
- [15] M. Matar y R. Welti, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 631 (2009).
- [16] A. Sommerfeld, *Electrodynamics* (Academic Press, New York, 1952).
- [17] P.J. Nahin, *O. J. Heaviside, The Life, Work, and Times of an Electrical Genius of the Victorian Age* (The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2002).
- [18] O. Heaviside, The Electrician **14**, 220 (1885).
- [19] R.P. Feynman, R.B Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, 1965), v. 2.
- [20] O.D. Jefimenko, *Electricity and Magnetism* (Plenum, New York, 1966).
- [21] H.B. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data* (MacMillan, New York, 1961).
- [22] P. Fishbane, S. Gasiorowicz and S.T. Thornton, *Physics for Scientists and Engineers* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993).
- [23] D.C. Giancoli, *Physics for Scientists and Engineers* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1988).
- [24] J.W. Kane and M.M. Sternheim, *Physics* (Wiley, New York, 1988).
- [25] F. Miller and D. Schoerer, *College Physics* (Harcourt Brace Jovanovich, San Diego, 1987).
- [26] H.C. Ohanian, *Physics* (Norton, New York, 1989).
- [27] R. Chabay and B. Sherwood, *Electric and Magnetic Interactions* (Wiley, New York, 1995).
- [28] P.A. Tipler, *Physics Scientists and Engineers* (Worth, New York, 1990).
- [29] E.M. Purcell, *Electricity and Magnetism*, Berkeley Physics Course (McGraw-Hill, New York, 1985), v. 2.
- [30] R. Resnick, D. Halliday and K.S. Krane, *Physics for Students in Science and Engineering* (Wiley, New York, 1992).
- [31] P. Lorrain, D. Corson and F. Lorrain, *Electromagnetic Field and Waves* (Freeman, New York, 1988).
- [32] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1989).
- [33] J.R. Reitz, F.J. Milford and R.W. Christy, *Foundation of Electromagnetic Theory* (Addison-Wesley, Reading, 1993).

- [34] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1975).
- [35] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. and L.P. Pitaevskii, *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon, Oxford, 1984).
- [36] W.K. Panofsky and M. Philips, *Classical Electricity and Magnetism* (McGraw-Hill, New York, 1962).
- [37] W.R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity* (McGraw-Hill, New York, 1968).