

O rolamento freado do magneto na rampa: uma interessante aplicação da lei de Faraday-Lenz

(The braked rolling of magnets on an inclined plan: an interesting application of the Faraday-Lenz law)

Fernando Lang da Silveira¹ e Maria Cristina Varriale²

¹Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil

²Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil

Recebido em 27/2/2009; Aceito em 1/7/2009; Revisado em 21/6/2009; Publicado em 18/2/2010

Aborda-se uma interessante aplicação da lei de Faraday-Lenz que consiste em deixar magnetos cilíndricos rolar sobre uma rampa de alumínio. Além de ocorrer a frenagem eletromagnética dos ímãs que rolam, apontamos um inesperado efeito que leva a afastar os magnetos das bordas da rampa. Mostramos que o movimento pode ser estudado experimentalmente, inclusive na sua fase acelerada, com o auxílio de uma câmara digital.

Palavras-chave: frenagem eletromagnética, lei de Faraday-Lenz.

An interesting Faraday-Lenz law application, consisting in letting cylindrical magnets roll down on a aluminium inclined plan is presented. Besides the electromagnetic braking of the rolling magnets, an unexpected effect with causes the magnet deviation from the edge of the ramp is exhibited. We show that this movement can be experimentally studied, even its accelerated phase, with a digital camera.

Keywords: electromagnetic braking, Faraday-Lenz law.

1. Introdução

Experimentos para ilustrar a lei de Faraday-Lenz, mais especificamente a frenagem eletromagnética de um ímã que cai em um tubo de cobre, já tem constituído nosso objeto de estudo em trabalho recente, no qual escrevemos:

A frenagem de um ímã se dá quando ele é deixado cair no interior de um tubo de material condutor não-ferromagnético posicionado verticalmente. Como ímã usa-se de preferência um desses “poderosos” pequenos magnetos de neodímio-ferro-boro que ultimamente surgiram no mercado. O que de fato acontece quando realizamos este singelo experimento constitui-se em uma dramática demonstração da lei da Faraday-Lenz! [1, p. 296].

A frenagem eletromagnética de um ímã de neodímio no tubo de cobre, devido às correntes elétricas induzidas, determina que a velocidade terminal do magneto seja de apenas alguns centímetros por segundo.

¹E-mail: lang@if.ufrgs.br.

²Observe-se que esta perda de energia mecânica não ocorreria se o cilindro que rola fosse não-magnético, situação na qual, havendo conservação de energia mecânica (se desprezarmos as perdas devido à resistência ao rolamento), ele desceria aceleradamente pela rampa, convertendo energia potencial gravitacional em energia cinética.

O experimento que propomos agora, também ilustrativo da lei de Faraday-Lenz, consiste em deixar rolar ímãs cilíndricos sobre uma rampa de alumínio ou cobre. A vantagem deste experimento sobre o anterior, é de que, por rolar sobre uma rampa, toda a trajetória é visível e, como mostraremos nas seções seguintes, esta visibilidade da trajetória facilita o estudo do movimento. Quando o experimento é conduzido com os “poderosos” magnetos de neodímio-ferro-boro, o resultado surpreende: depois de rolar por apenas alguns centímetros, a velocidade dos magnetos cilíndricos ao longo da rampa é praticamente constante. Ao se movimentar, o ímã produz em regiões próximas a ele uma indução magnética variável no tempo e, em conseqüência da lei de Faraday-Lenz, ocorrem campos elétricos induzidos [2]. A massa condutora da rampa metálica, sob a ação dos campos elétricos induzidos, propicia a ocorrência de correntes elétricas induzidas, também denominadas *correntes de Foucault* [3]. Como o condutor é resistivo, estas correntes elétricas dissipam energia por efeito Joule [4] e, em conseqüência, à medida que o magneto rola, descendo pela rampa, ocorre uma redução² em sua energia mecânica. A taxa

de dissipação da energia por efeito Joule na rampa cresce à medida que aumenta a velocidade do magneto em relação à rampa; quando essa taxa se iguala à potência da força motora sobre o magneto (a força motora é a componente da força gravitacional no magneto paralela à rampa), a energia cinética do magneto deve permanecer inalterada para que haja Conservação de Energia. Ou seja, a partir deste instante, o movimento do magneto será com velocidade constante, denominada *velocidade terminal*, e sua energia cinética não mais aumentará.

Os experimentos que analisaremos foram realizados em uma rampa de alumínio com 76 cm de comprimento, 5,0 cm de largura e 1,2 cm de espessura, utilizando-se ímãs cilíndricos de neodímio-ferro-boro e de ferrite.

2. Um inesperado efeito de borda

A Fig. 1 mostra duas imagens compostas a partir de doze fotografias tiradas com intervalos de tempo de um segundo entre uma e outra³. Três ímãs cilíndricos de neodímio, com cerca de 0,6 cm de diâmetro e de altura, foram associados em série e deixados rolar sobre a rampa. As linhas marcadas sobre a rampa de alumínio estão espaçadas por 10 cm.

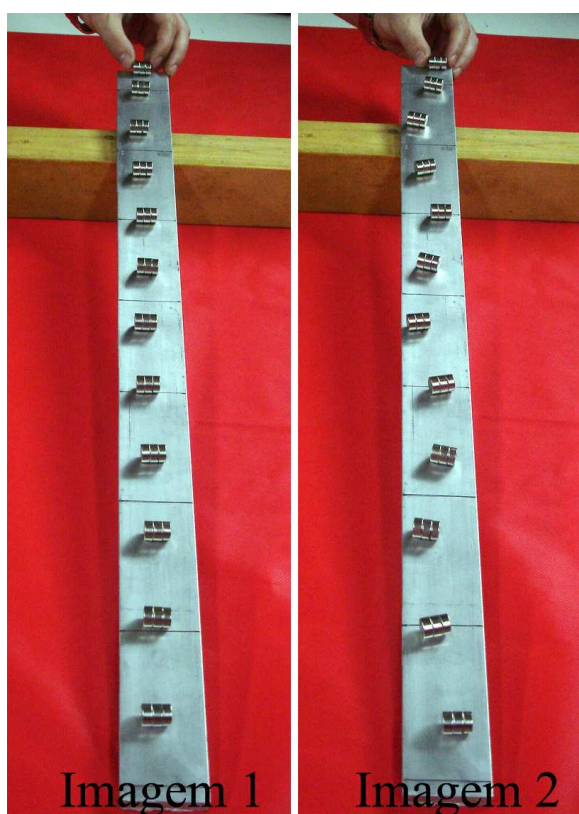


Figura 1 - Duas imagens obtidas a partir de 12 fotografias intercaladas por 1 s representam o movimento de rolamento freado eletromagneticamente dos ímãs sobre a rampa de alumínio.

³A partir das doze fotografias, com auxílio de um editor de fotos, foi criada cada uma das imagens. As posições dos magnetos na rampa representam com o máximo de fidelidade o movimento de rolamento nas duas situações.

Na imagem 1 pode-se observar que a associação dos três ímãs rola praticamente em linha reta. Tendo-se em conta que o intervalo de tempo entre as diferentes posições dos magnetos é de um segundo, e observando-se as marcas sobre a rampa (separadas por 10 cm), infere-se que o rolamento se dá com velocidade, praticamente constante, de cerca de 7 cm/s.

A imagem 2 permite notar um inesperado efeito(!), determinando que o rolamento ocorra em ziguezague. Tal efeito é obtido quando os magnetos são soltos perto de uma das bordas da rampa (observe as posições iniciais dos magnetos nas duas imagens).

O pólo do ímã mais próximo de uma borda da rampa sofre uma força eletromagnética de frenagem menor do que o outro pólo, pois, sendo menor a massa condutora (da rampa metálica) contígua à extremidade do magneto mais próxima à borda, menores serão as correntes elétricas induzidas nesta extremidade. Estando submetida a uma frenagem menor, a extremidade do magneto mais próxima à borda deslocar-se-á um pouco mais rapidamente do que a outra extremidade e o movimento será, conseqüentemente, desviado para longe desta borda. Com isso, o magneto estará agora se aproximando da outra borda, provocando o mesmo efeito, desta vez com relação ao outro pólo, e daí o movimento em ziguezague registrado na imagem 2. Apesar de o movimento acontecer em ziguezague, percebe-se, por comparação das imagens 1 e 2, que ele ocorre aproximadamente com a mesma velocidade de 7 cm/s rampa abaixo.

O leitor poderá ver um vídeo apresentando o rolamento dos magnetos sobre a rampa de alumínio em <http://www.if.ufrgs.br/~lang/Rolamento-magneto.wmv> (acessado em 18/2/2009).

3. A velocidade terminal dos magnetos depende da inclinação da rampa

Quando a indução magnética produzida pelos ímãs em um ponto do espaço varia no tempo devido ao movimento dos magnetos, a lei de Faraday-Lenz prevê a existência de campos elétricos induzidos com intensidade proporcional à taxa de variação temporal da indução magnética. Essas variações são tanto mais rápidas quanto maior é a velocidade dos magnetos em relação à rampa e, portanto, a intensidade dos campos elétricos induzidos e, conseqüentemente, as intensidades das correntes elétricas induzidas na massa condutora crescem conforme aumenta a velocidade dos magnetos. Desta forma, as forças eletromagnéticas de frenagem exercidas nos ímãs crescem com a velocidade. A força motora sobre os magnetos é a componente do peso dos magnetos na direção paralela à rampa e, *quando os magnetos atingirem a velocidade terminal, a força motora estará*

sendo equilibrada pelas forças de atrito de rolamento e pelas forças eletromagnéticas de frenagem. Como a força motora é proporcional ao seno do ângulo de inclinação da rampa, as velocidades terminais atingidas pelos magnetos serão tanto maiores quanto mais inclinada a rampa estiver.

Os ímãs de neodímio têm velocidades terminais pequenas, as quais são atingidas depois de os magnetos se deslocarem sobre a rampa por apenas alguns poucos centímetros. Assim sendo, o movimento desses magnetos se dá ao longo de toda a rampa com velocidade praticamente constante. A Fig. 2 mostra, para duas inclinações da rampa (aproximadamente 10° e 7° de inclinação), os gráficos da posição contra o tempo para o rolamento dos magnetos. Os ímãs foram abandonados em repouso a partir da posição $x = -3$ cm, isto é, a uma distância de cerca de 3 cm antes da origem do eixo das posições; esta distância é suficiente para que os magnetos já estejam com a velocidade terminal ao atingir a posição $x = 0$. A rampa estava marcada a cada 10 cm, como se pode ver nas duas imagens da Fig. 1. Na Fig. 2 apresentamos para sete posições (10 cm, 20 cm, 30 cm, ..., 70 cm) a média de cinco medidas de tempo. As medidas de tempo foram realizadas manualmente com o auxílio de um cronômetro.

Conforme se observa na Fig. 2, as velocidades dos magnetos são praticamente constantes⁴, de 7,89 cm/s e 5,47 cm/s, para as inclinações de 10° e 7° , respectivamente (os erros padrão das duas velocidades são inferiores a 0,03 cm/s).

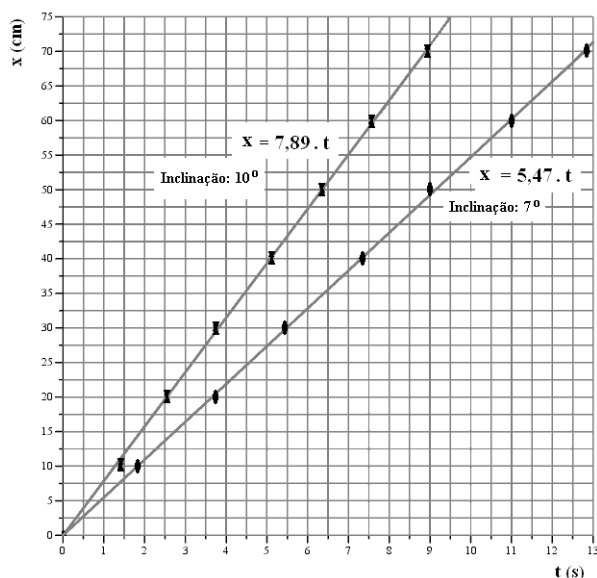


Figura 2 - Gráfico da posição em função do tempo para o rolamento dos magnetos em duas diferentes inclinações da rampa.

⁴A aderência das retas aos pontos experimentais, pelo método dos mínimos quadrados, se dá para as duas inclinações da rampa com coeficiente de determinação (R^2) maior do que 0,999. Todos os gráficos e tratamentos estatísticos dos dados experimentais foram realizados com o pacote estatístico SPSS – Versão 13.0.

⁵A aderência da reta aos pontos experimentais se dá com um coeficiente de determinação (R^2) de 0,998.

A Fig. 3 representa as medidas de velocidade terminal dos magnetos em função do seno do ângulo de inclinação da rampa, para oito diferentes inclinações. O método dos mínimos quadrados [5] foi utilizado para se estimar os parâmetros da reta que melhor adere⁵ aos pontos experimentais.

O parâmetro que corresponde ao termo independente da equação da reta ($-0,7$ cm/s) é estatisticamente significativo em nível de 3%. Portanto, o fato de a reta não passar pela origem não pode ser atribuído ao acaso. Este resultado indica que o magneto cilíndrico não rolará se a inclinação da rampa não ultrapassar um valor mínimo (cerca de 1°). Ora, a necessidade de um ângulo mínimo para se iniciar o rolamento não pode ser atribuído à força eletromagnética devida às correntes elétricas induzidas, pois essas só existem quando há movimento em relação à rampa; o que explica a necessidade de um ângulo mínimo de inclinação da rampa para que se inicie o movimento é a *resistência ao rolamento* [6], que ocorre independentemente de o cilindro ser ou não magnético.

Os resultados experimentais expressos no gráfico da Fig. 3 suportam empiricamente o crescimento linear da velocidade terminal dos magnetos na rampa com o seno da inclinação da rampa e, portanto, com a intensidade da força motora. Qualitativamente esse comportamento é análogo àquele expresso na Eq. (25) da Ref. [1], que permite calcular a velocidade terminal dos magnetos que caem dentro do tubo de cobre.

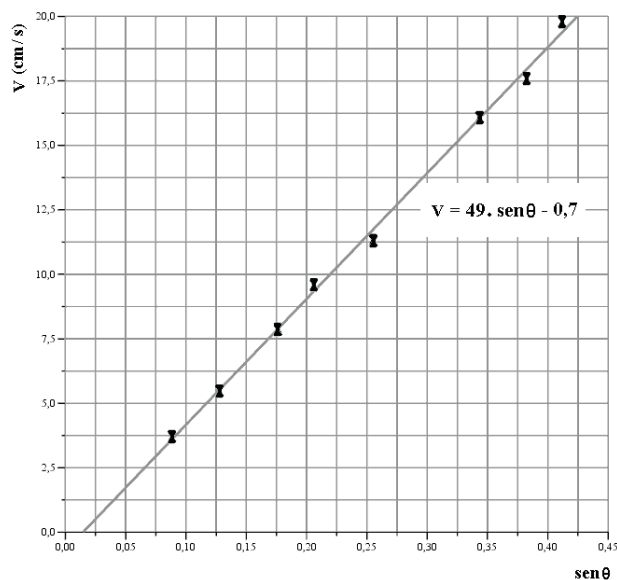


Figura 3 - Velocidade terminal dos magnetos em função do seno da inclinação da rampa.

4. Estudando a fase acelerada do rolamento dos magnetos

Nesta seção, começaremos por justificar teoricamente o fato de que a fase acelerada dos magnetos de neodímio na rampa de alumínio se estende por pouco tempo e por uma distância muito curta. A seguir, apresentaremos um estudo experimental da fase acelerada do rolamento, efetuado com o auxílio de uma câmara fotográfica digital.

Para desenvolver a justificativa teórica acima referida, usaremos conhecimentos presentes em textos de mecânica que tratam do movimento com força resistiva proporcional à velocidade e com força motora constante [7]. Nosso sistema encaixa-se exatamente nesta situação, visto que a força eletromagnética de frenagem, devida às correntes elétricas induzidas, cresce linearmente com a velocidade e a força motora é constante. Então, a velocidade do magneto - $v(t)$ - que é inicialmente (em $t = 0$) nula, tenderá à velocidade terminal (V) através de uma curva exponencial do tipo

$$v(t) = V \left(1 - e^{-t/\tau} \right), \quad (1)$$

onde τ é a constante de tempo para esse movimento.

Observe-se que, quando $t = \tau$, teremos $v(\tau) = V(1 - e^{-1}) \cong 0.63V$; isto significa que a constante de tempo é o intervalo de tempo necessário para que, tendo partido do repouso, a velocidade cresça até 63% da velocidade terminal. Por outro lado, ao calcular, a partir da Eq. (1) o valor da derivada de $v(t)$ quando $t = 0$, obtemos que $v'(0) = \frac{V}{\tau}$, donde conclui-se que

$$\tau = \frac{V}{v'(0)}. \quad (2)$$

O resultado apresentado na Eq. (2) indica que a constante de tempo pode ser estimada facilmente através da razão entre o valor da velocidade terminal e o valor da derivada da velocidade em $t = 0$ (esta derivada é a aceleração inicial do magneto).

A Fig. 4 é um gráfico para a expressão (1), representando a velocidade dos magnetos em função do tempo. Observam-se nesse gráfico as propriedades demonstradas nos parágrafos anteriores, a saber: a) quando $t = \tau$, o valor da velocidade v é 0,63 V ; b) a reta tracejada, tangente à curva $v(t)$ na origem, passa pelo ponto (τ, V) , evidenciando que o significado cinemático da declividade (V/τ) dessa reta é a aceleração inicial dos magnetos.

As velocidades terminais são conhecidas experimentalmente; a aceleração inicial pode ser estimada como a aceleração de um cilindro que rola em uma rampa sem a força eletromagnética de frenagem, ou seja, cerca de dois terços do produto da aceleração gravitacional pelo seno do ângulo de inclinação. Quando estimamos a

constante de tempo a partir dos dados das Figs. 2 e 3, encontramos tempos da ordem de 0,07 s apenas⁶. Portanto, os magnetos atingem a velocidade terminal em apenas alguns décimos de segundo; se calcularmos os deslocamentos percorridos durante estes intervalos de tempo, encontraremos não mais do que dois centímetros!

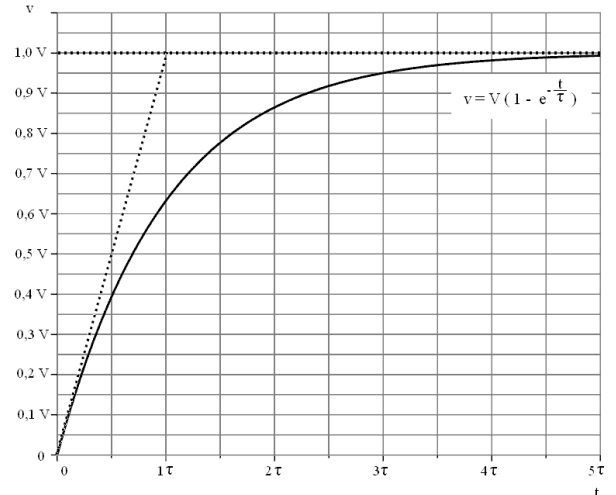


Figura 4 - Gráfico da velocidade dos magnetos em função do tempo; os parâmetros τ e V são, respectivamente, a constante de tempo e a velocidade terminal do movimento.

Este resultado teórico é compatível com o que se observa quando os magnetos de neodímio rolam na rampa: parece-nos que imediatamente percorrem sua trajetória com velocidade constante (vide as imagens da Fig. 1 e o vídeo referido anteriormente).

Para se estudar experimentalmente a fase acelerada, seria conveniente que a constante de tempo fosse maior. Como, de acordo com a Eq. (2), ela é diretamente proporcional à velocidade terminal, e esta depende da intensidade das correntes elétricas induzidas, pode-se aumentar a constante de tempo mediante a redução das correntes elétricas. A espessura da rampa de alumínio está associada à intensidade das correntes elétricas induzidas pois, quanto menos espessa ela for, maiores serão as resistências elétricas nos trajetos onde ocorrerem tais correntes. Concluimos, portanto, que, sobre uma rampa menos espessa, os magnetos atingiriam velocidades maiores.

Entretanto, optamos por reduzir as correntes elétricas induzidas, utilizando a mesma rampa, mas usando ímãs mais “fracos”. Para isso, utilizamos ímãs de ferrite, com dimensões semelhantes àsquelas dos ímãs de neodímio. Enquanto os ímãs de neodímio produzem induções magnéticas máximas com intensidade superior a 1 Tesla [1], os magnetos de ferrite alcançam no máximo cerca de 0,2 Tesla. Portanto, a constante de tempo para o rolamento de magnetos de ferrite na mesma rampa será maior do que a constante de tempo

⁶Se a reta da Fig. 3 passasse pela origem, a constante de tempo seria rigorosamente independente da inclinação da rampa, como se pode facilmente demonstrar.

para os ímãs de neodímio.

Ainda assim, os tempos envolvidos na fase acelerada são demasiadamente pequenos para que se possa medi-los manualmente com um cronômetro, pois o trânsito do magneto sobre toda a rampa será de poucos segundos. Com o auxílio de uma câmara fotográfica digital fizemos vídeos do movimento dos magnetos de ferrite rolando sobre a rampa; a barra de alumínio foi marcada a cada 2,5 cm para que se pudesse no vídeo fazer medidas de posição dos magnetos. O vídeo foi realizado na razão de 30 quadros por segundo, o que permitia medir intervalos de tempo de 1/30 de segundo. Utilizamos o *software* Tracker⁷ para analisar os vídeos.

A Fig. 5 apresenta gráficos de posição contra tempo para os rolamentos de um cilindro não-magnético e dos magnetos de ferrite, na mesma rampa. Nestes gráficos, marcamos os pontos experimentais, aos quais ajustamos curvas teóricas, cujos parâmetros foram calculados de acordo com as seguintes equações de movimento. O cilindro não-magnético que rola partindo do repouso, na origem do sistema de coordenadas, com aceleração constante, tem uma equação de movimento bem conhecida (a equação de segundo grau no tempo com parâmetros nulos no termo linear e no termo independente do tempo). A equação de movimento aplicável aos magnetos de ferrite é menos conhecida, mas pode ser facilmente obtida a partir da expressão para a sua velocidade. Como o movimento se dá a partir do repouso, iniciando na origem do sistema de coordenadas, a posição $x(t)$ em função do tempo t será expressa pela integral de 0 a t , da expressão da velocidade apresentada na Eq. (1), o que leva a

$$x(t) = V \left[t - \tau \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \right] \quad (3)$$

Ambas as equações de ajustamento aderiram aos pontos experimentais com coeficiente de determinação (R^2) maior do que 0,999. Os parâmetros apresentados nas equações da Fig. 5 estão expressos de tal forma que o erro padrão do parâmetro afeta o último algarismo significativo do parâmetro. De acordo com a expectativa, a constante de tempo para o rolamento dos magnetos de ferrite é bem maior (0,69 s) do que para os magnetos de neodímio (0,07 s) e, conseqüentemente, aqueles atingem velocidade terminal bem maior (46,5 cm/s) do que esses (5,5 cm/s), em uma rampa com a mesma inclinação (lembramos que a inclinação da rampa afeta a aceleração inicial dos magnetos).

Do ponto de vista teórico, espera-se que os magnetos de ferrite tenham no instante inicial (quando ainda não há correntes elétricas induzidas na rampa) a mesma aceleração de um cilindro não-magnético. Como, pela Eq. (2), tem-se que a aceleração inicial dos magnetos de ferrite é igual à razão da velocidade terminal pela constante de tempo, obtém-se: 46,5 cm/s dividido por 0,69 s, ou seja 67,4 cm/s², donde percebe-se que esse resultado é muito semelhante à aceleração do cilindro não-magnético (67,2 cm/s²), corroborando assim a expectativa teórica.

5. Conclusão

Nesse artigo apresentamos uma interessante ilustração da lei de Faraday-Lenz que consiste no rolamento freado de magnetos cilíndricos em uma rampa de alumínio. Destacamos também um inesperado efeito que tende a afastar os magnetos das bordas da rampa.

Mostramos que o rolamento de magnetos de neodímio se dá, para fins práticos, com velocidade constante ao longo de quase toda a rampa. Esse movimento poderia ser utilizado para ilustrar experimentalmente a ocorrência do Movimento Retilíneo Uniforme, prestando-se à determinação empírica da velocidade, com auxílio apenas de um cronômetro manual e de uma régua. Experimentos desse tipo podem ser realizados até no ensino de nível médio.

Finalmente, mostramos que também é possível analisar experimentalmente, com o auxílio de vídeos, a fase acelerada do movimento de magnetos de ferrite na rampa de alumínio. O estudo experimental de tal tipo de movimento é de interesse em disciplinas de mecânica em nível superior.

6. Agradecimentos

Agradecemos aos físicos responsáveis pelos Laboratórios de Ensino do IF-UFRGS, especialmente ao

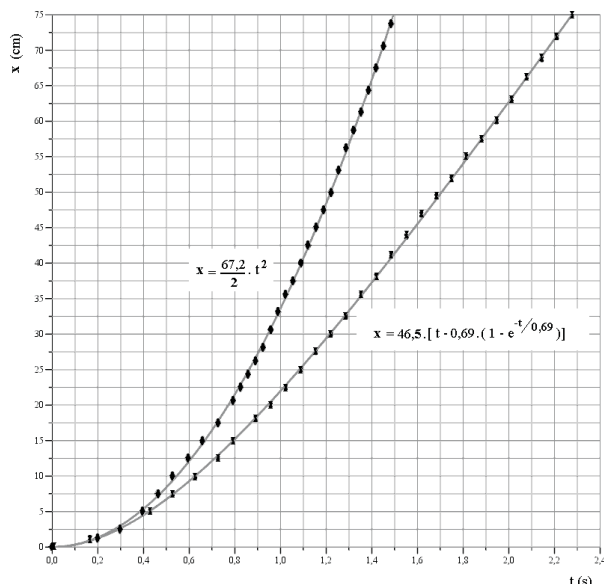


Figura 5 - Gráficos da posição em função do tempo para o rolamento de um cilindro não-magnético e dos magnetos de ferrite na rampa de alumínio.

⁷O *software* Tracker é livre, incorpora uma série de ferramentas para análise de vídeos e pode ser baixado em www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/ (acessado em 18/2/2009).

Eloir De Carli, pelo apoio na feitura das fotos e dos vídeos.

Referências

- [1] F.L. Silveira, Y. Levin e F.B. Barbedo, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* **24**, 295 (2007).
- [2] H.D. Young and R.A. Freedman, *University Physics* (Addison-Wesley, Reading, 1996).
- [3] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica 3 – Eletromagnetismo* (Edgard Blücher, São Paulo, 1997).
- [4] I.V. Savéliev, *Curso de Física General* (MIR, Moscou, 1984).
- [5] J. Mandel, *The Statistical Analysis of Experimental Data* (Nova York, Dover, 1964).
- [6] M.D. Artamonov, V.A. Ilarionov and M.M. Morin, *Motor Vehicles* (MIR, Moscou, 1976).
- [7] J.B. Marion and S.T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Harcourt Brace, Fort Worth, 1995).