

Ondas superficiais de gravidade

(Surface gravity waves)

Alcione S. Fernandes¹ e Giselle M. Alves

Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

Escola Técnica da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

Recebido em 16/7/2008; Revisado em 22/1/2009; Aceito em 6/2/2009; Publicado em 26/6/2009

Neste artigo discutimos a propagação de ondas de pequena amplitude num líquido de profundidade constante com base em uma equação de ondas. A solução geral mostra que a velocidade de propagação é dependente do comprimento de onda de modo que ocorre o fenômeno da dispersão. Soluções para os casos de pequena e grande profundidades são também obtidas.

Palavras-chave: ondas de gravidade, dispersão de ondas, ondas num líquido.

In this article we discuss the propagation of small amplitude waves in a liquid of constant depth based on a wave equation. The general solution shows that propagation speed depends on the wavelength and consequently there is waves dispersion. Solutions for shallow and the deep water are shown.

Keywords: gravity waves, wave dispersion, waves on the liquid.

1. Introdução

O estudo da propagação de ondas é fundamental para a formação dos alunos dos cursos de física, matemática e das engenharias. No seu desenvolvimento é possível aplicar várias técnicas matemáticas como o emprego de uma teoria linearizada, ferramenta simples e extremamente útil na resolução de problemas complexos, bem como a obtenção da solução de equações diferenciais com condições de contorno.

Neste artigo desenvolvemos, com base em conceitos acessíveis aos alunos dos cursos iniciais de cálculo e física, alguns aspectos da teoria da propagação de perturbações harmônicas na superfície de um líquido de profundidade constante e inicialmente em repouso. Uma abordagem computacional deste tema foi desenvolvida recentemente [1]. Informações descritivas [2] ou mais avançadas [3, 4] são encontradas na literatura.

Inicialmente, consideremos o escoamento de um fluido não viscoso e sujeito a uma força gravitacional. O movimento deste fluido ideal é descrito pela equação de Euler [5]

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla p = \rho \mathbf{f}, \quad (1)$$

e pela equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2)$$

Nestas equações $\rho(\mathbf{r}, t)$ representa a densidade do fluido, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ a velocidade, $p(\mathbf{r}, t)$ a pressão e \mathbf{f} a força gravitacional específica (força por unidade de massa).

Suponhamos que o fluido, inicialmente em equilíbrio ($\rho = \rho_0$, $\mathbf{v} = 0$ e $p = p_0$), experimenta uma perturbação de modo a adquirir a velocidade de escoamento $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$, com densidade e pressão dadas por

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) + \bar{\rho}(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0(\mathbf{r}) + \bar{p}(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

com $\bar{\rho}/\rho_0 \ll 1$ e $\bar{p}/p_0 \ll 1$.

Vamos considerar que as perturbações das grandezas de equilíbrio e seus gradientes são pequenos de modo que seus produtos podem ser desprezados e somente os termos lineares são mantidos. Além disso, da Eq. (1) $\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{f}$ no equilíbrio. Substituindo as Eqs. (3) e (4) nas Eqs. (1) e (2), obtemos

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \nabla \bar{p} = \bar{\rho} \mathbf{f}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (6)$$

onde admitimos que a densidade de equilíbrio é aproximadamente uniforme de modo que podemos descartar o termo de segunda ordem $\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \rho_0$.

Se tomarmos o rotacional de ambos os membros da Eq. (5) e tendo em conta que a força gravitacional é

¹E-mail: alcionesf@ig.com.br.

conservativa, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{\mathbf{v}}) = 0. \quad (7)$$

Como $\nabla \times \bar{\mathbf{v}}$ é proporcional à velocidade angular em cada ponto do fluido e esta não muda com o tempo, então a solução possível para a Eq. (7) é

$$\nabla \times \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (8)$$

de modo que o fluido é irrotacional em todos os pontos. Desta forma, podemos relacionar o campo de velocidades a um potencial escalar $\phi(\mathbf{r}, t)$, através de

$$\bar{\mathbf{v}} = \nabla \phi, \quad (9)$$

com componentes

$$\bar{v}_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \bar{v}_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \bar{v}_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (10)$$

Se considerarmos que o fluido é incompressível, isto é, a densidade permanece constante, obtemos da Eq. (6) que

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (11)$$

Substituindo a Eq. (9) na anterior, resulta a equação de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$ ou, em coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (12)$$

Portanto, um fluido irrotacional e incompressível pode ser descrito por uma função potencial escalar que é solução da equação de Laplace e com componentes da velocidade dadas pelas Eqs. (10).

2. Ondas superficiais de gravidade

Consideremos em seguida, a propagação de uma perturbação provocada na superfície livre de um líquido com profundidade uniforme e sujeito a um campo gravitacional uniforme. Estas ondas progressivas longitudinais são denominadas *ondas superficiais de gravidade* [3]. As amplitudes perturbativas são consideradas pequenas em relação às grandezas de equilíbrio, de modo que podemos reter apenas os termos lineares. Uma situação adequada a estas condições é a de uma brisa suave ou a queda de uma pequena pedra na superfície de mar calmo.

Para estudar as ondas superficiais de gravidade num líquido de profundidade uniforme h , vamos considerar que:

(a) o líquido é perturbado a partir do repouso, por exemplo, pela ação de um vento suave; assim as velocidades e os deslocamentos das partículas são pequenos o que nos permite desconsiderar os seus produtos;

(b) o fluxo é irrotacional de modo que o campo de velocidades do líquido deriva de um potencial escalar;

(c) a amplitude ζ_0 das ondas é muito menor que o comprimento de onda ($\zeta_0/\lambda \ll 1$);

(d) não são considerados os efeitos de tensão superficial, viscosidade e condutividade térmica.

Para ondas progressivas na direção x do plano xz (veja Fig. 1) não há dependência da coordenada y de modo que o nosso problema é bidimensional. Desta forma, temos da Eq. (12) que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (13)$$

com as componentes das velocidades das partículas do líquido dadas por

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (14)$$

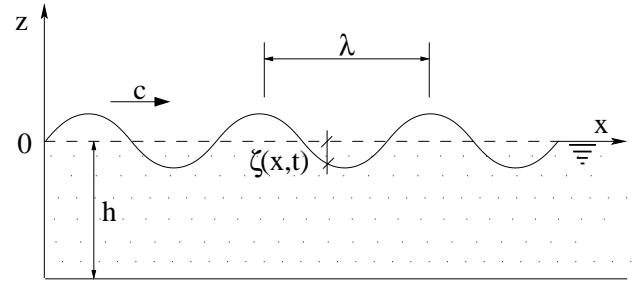


Figura 1 - Onda que se propaga na superfície de um líquido com profundidade h

O primeiro passo é obter o potencial escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ da Eq. (13) e que está sujeito às seguintes condições de contorno:

(a) no fundo a componente vertical da velocidade do líquido é nula, ou seja

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=-h} = 0. \quad (15)$$

(b) A superfície livre do líquido é descrita por $z(x, t) = \zeta(x, t)$ e a velocidade para as partículas da superfície é dada por

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (16)$$

Se expandirmos o primeiro membro desta equação em série de Taylor em torno de $z = 0$, concluímos que

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (17)$$

onde a aproximação linear foi usada. Esta é uma condição de contorno cinemática pois envolve a velocidade da superfície livre do líquido.

(c) Como a tensão superficial não é levada em conta então as pressões em ambos os lados da superfície livre do líquido são iguais; além disso, como a pressão atmosférica é constante ao longo da superfície livre podemos considerá-la nula sem perda de generalidade, ou seja

$$p(\zeta, t) = 0, \quad (18)$$

e a equação de Bernoulli (A.8) torna-se

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\zeta\right)_{z=0} = 0. \quad (19)$$

Em resumo, o problema consiste em determinar o potencial escalar $\phi(x, z, t)$ para a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0, \quad (20)$$

sujeito às condições de contorno

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \quad \text{para } z = -h, \quad (21)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}, \quad \text{para } z = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -g\zeta, \quad \text{para } z = 0. \quad (23)$$

Após obtermos a função $\phi(x, z, t)$ podemos determinar as componentes da velocidade do líquido através das Eqs. (14). Para isso, entretanto, é necessário explicitar a forma para a superfície livre $\zeta(x, t)$.

3. A função $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$ para perturbações periódicas

Consideremos as perturbações periódicas da superfície livre do líquido na forma de uma onda progressiva na direção x

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 \cos(\kappa x - \omega t), \quad (24)$$

onde ζ_0 é a amplitude constante da onda. Esta escolha pode ser justificada pelo fato de que uma perturbação arbitrária pode ser construída adicionando componentes sinusoidais através de uma série de Fourier.

Comparando a equação anterior com as Eqs. (22) e (23) verificamos que o potencial escalar deve ser da forma

$$\phi(x, z, t) = \Phi(z) \sin(\kappa x - \omega t), \quad (25)$$

onde a amplitude $\Phi(z)$ e a relação de dispersão $\omega = \omega(\kappa)$ devem ser determinadas.

Substituindo a Eq. (25) na (20), obtemos a equação diferencial linear de segunda ordem para a amplitude

$$\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} - \kappa^2\Phi(z) = 0, \quad (26)$$

com solução geral

$$\Phi(z) = a e^{\kappa z} + b e^{-\kappa z}, \quad (27)$$

onde a e b são constantes de integração. Da Eq. (25) temos

$$\phi(x, z, t) = (a e^{\kappa z} + b e^{-\kappa z}) \sin(\kappa x - \omega t), \quad (28)$$

e utilizando as condições de contorno (21) e (22) resulta

$$a = \frac{\omega}{\kappa} \frac{\zeta_0}{1 - e^{-2\kappa h}}, \quad b = \frac{\omega}{\kappa} \frac{\zeta_0 e^{-2\kappa h}}{1 - e^{-2\kappa h}}. \quad (29)$$

Portanto, o potencial escalar (25) é dado por

$$\phi(x, z, t) = \zeta_0 \frac{\omega}{\kappa} \frac{\cosh[\kappa(z+h)]}{\sinh(\kappa h)} \sin(\kappa x - \omega t). \quad (30)$$

Após determinarmos o potencial escalar podemos passar para a obtenção das demais variáveis que caracterizam o movimento do líquido como velocidades e posições das partículas, frequência angular e velocidade de propagação da onda.

4. Resultados

4.1. Velocidades e trajetórias das partículas, frequência angular e velocidade de fase da onda

As componentes da velocidade das partículas são dadas, através das Eqs. (14) e (30), por

$$\begin{aligned} v_x(x, z, t) &= \omega \zeta_0 \frac{\cosh[\kappa(z+h)]}{\sinh(\kappa h)} \cos(\kappa x - \omega t), \\ v_z(x, z, t) &= \omega \zeta_0 \frac{\sinh[\kappa(z+h)]}{\sinh(\kappa h)} \sin(\kappa x - \omega t). \end{aligned} \quad (31)$$

Consideremos que as partículas de fluido oscilam com pequenas amplitudes em torno da posição de equilíbrio (x_0, z_0) e que diferem pouco das coordenadas (x, z) ; assim, podemos integrar no tempo as equações (31) para obtermos

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -a(z_0) \sin(\kappa x_0 - \omega t), \\ z - z_0 &= b(z_0) \cos(\kappa x_0 - \omega t) \end{aligned} \quad (32)$$

de modo que as trajetórias das partículas são elipses descritas por

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2(z_0)} + \frac{(z - z_0)^2}{b^2(z_0)} = 0, \quad (33)$$

com semi-eixos maior e menor que dependem da profundidade de acordo com

$$\begin{aligned} a(z_0) &= \zeta_0 \frac{\cosh[\kappa(z_0+h)]}{\sinh(\kappa h)}, \\ b(z_0) &= \zeta_0 \frac{\sinh[\kappa(z_0+h)]}{\sinh(\kappa h)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Da condição de contorno (23) e Eq. (24) obtemos a frequência angular ω como função de κ , denominada relação de dispersão, como

$$\omega(\kappa) = [\kappa g \operatorname{tgh}(\kappa h)]^{1/2}. \quad (35)$$

Para a velocidade de fase ω/κ , temos

$$c(\lambda) = \left[\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \right]^{1/2}, \quad (36)$$

onde utilizamos $\kappa = 2\pi/\lambda$. A Eq. (36) está representada pela curva (a) da Fig. 2.

O movimento ondulatório apresenta, então, as seguintes características:

(a) a Eq. (36) representa uma relação dispersiva pois a cada comprimento de onda corresponde uma velocidade de propagação diferente, de modo que as ondas se dispersam no líquido;

(b) na curva (a) da Fig. 2 observamos que, para uma dada profundidade h , a velocidade de fase cresce rapidamente com o comprimento de onda λ e tende para o valor limite $(gh)^{1/2}$, como será mostrado na seção 5.2;

(c) as Eqs. (32) mostram que as fases dos movimentos (argumentos das funções sinusoidais) independem da profundidade z_0 ; assim, as partículas executam movimentos oscilatórios em fase, isto é, em cada instante, se para um dado x_0 uma delas está no topo da trajetória então todas estarão;

(d) as Eqs. (34) indicam que os semi-eixos das trajetórias elípticas diminuem com a profundidade e, no fundo ($z_0 = -h$), o movimento das partículas é horizontal pois $b(z_0) = 0$.

Ao desprezarmos o termo $\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}$ consideramos que $v_x \partial v_z / \partial x \ll \partial v_z / \partial t$ na equação de movimento (1); com as Eqs. (31) verificamos então, que os nossos resultados são válidos para

$$\zeta_0 \ll \lambda, \quad (37)$$

isto é, para situações em que a amplitude da perturbação é muito menor que o comprimento da onda que propaga, como foi observado no item (c) da seção 2.

4.2. Variações de pressão

A pressão hidrostática na profundidade $-z^2$ é $p_0(z) = -\rho gz$ desde que consideramos a pressão atmosférica nula e $z < 0$ abaixo da superfície livre do líquido. Sendo $\delta p(x, z, t) = p(x, z, t) - p_0$ a perturbação na pressão, temos que

$$p(x, z, t) = -\rho gz + \delta p. \quad (38)$$

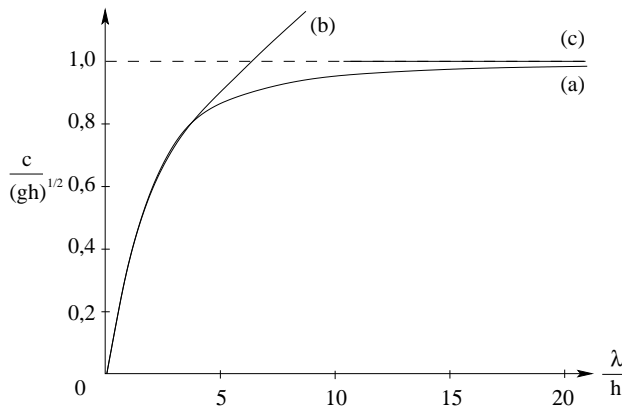


Figura 2 - Velocidade de fase das ondas na superfície do líquido: (a) profundidade qualquer, (b) águas profundas, (c) águas rasas.

²As coordenadas z e z_0 só precisam ser distinguidas quando tratamos do movimento das partículas, como na seção 4.1.

Utilizando a equação de Bernoulli (A.8), obtemos

$$\delta p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (39)$$

que, juntamente com as Eqs. (30) e (35) resulta na seguinte expressão para as variações na pressão do líquido que ocorrem pela passagem da onda

$$\delta p(x, z, t) = \zeta_0 \rho g \frac{\cosh[\kappa(z+h)]}{\cosh(\kappa h)} \cos(\kappa x - \omega t). \quad (40)$$

Desta forma, com um sensor colocado na profundidade $-z$ medimos a pressão local $p(x, z, t)$ e, através da Eq. (38), determinamos as variações de pressão $\delta p(x, z, t)$ que podem ser confrontadas com a Eq. (40) para obtermos, por exemplo, as amplitudes ζ_0 das ondas que se propagam na superfície.

5. Aproximação dos resultados para diferentes profundidades

Nesta seção, vamos adaptar os resultados gerais obtidos para locais com grandes ou pequenas profundidades h relativas ao comprimento de onda λ da onda que se propaga.

5.1. Ondas em águas profundas

Inicialmente, vamos analisar quais são as características das ondas que se propagam em regiões em que a profundidade é muito maior que o comprimento de onda, isto é, em que $\kappa h = 2\pi h/\lambda \gg 1$.

Na Fig. 3 verificamos a função $\tanh x \rightarrow 1$ para grandes valores de x . No entanto não é necessário que x seja muito grande para que isto ocorra; por exemplo, para $x = \kappa h = 1,75$, que corresponde a $h/\lambda = 0,28$, já obtemos $\tanh x = 0,94$. Com esta aproximação, podemos escrever a equação para a velocidade de fase (36)

$$c(\lambda) = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2}, \quad \text{para } \lambda \leq 3,6h. \quad (41)$$

Esta equação está representada pela curva (b) da Fig. 2 e exhibe o fato que as ondas com maiores comprimentos de onda se deslocam mais rapidamente, isto é, apresentam o fenômeno da dispersão.

Se estamos sentados à beira da praia e percebemos a chegada de cristas de ondas em intervalos regulares, por exemplo, de $T = 8$ s, então, da Eq. (41) e de $c = \lambda/T$, concluímos que o comprimento de onda correspondente é

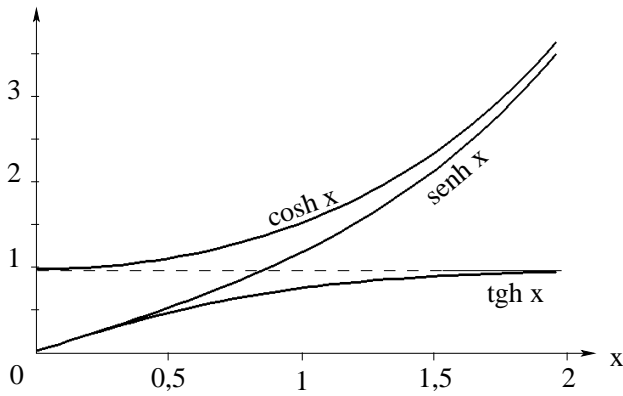


Figura 3 - Funções hiperbólicas.

$$\lambda = \frac{gT^2}{2\pi} \simeq 100 \text{ m}, \quad (42)$$

e velocidade de fase $c \simeq 45 \text{ km/h}$. Observemos que este comprimento de onda se refere às regiões distantes da praia, onde devemos ter a profundidade $h \geq 28 \text{ m}$; próximo da praia o comprimento de onda será muito menor (veja seção 5.2), embora o período da onda permaneça inalterado, de modo análogo ao de ondas eletromagnéticas que passam através de meios com índices de refração diferentes.

Para águas profundas as trajetórias das partículas de líquido são dadas, através das Eqs. (32) e (34) e com $\sinh x \approx \cosh x \approx e^x$, por

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -\zeta_0 e^{\kappa z_0} \sin(\kappa x_0 - \omega t), \\ z - z_0 &= \zeta_0 e^{\kappa z_0} \cos(\kappa x_0 - \omega t), \end{aligned} \quad (43)$$

as quais representam circunferências centradas em (x_0, z_0) e raios $r(z) = \zeta_0 e^{\kappa z}$ que decrescem com a profundidade, como mostrado na Fig. 4(a). Para uma profundidade igual à metade do comprimento de onda, temos que

$$\frac{r(-\lambda/2)}{r(0)} = \frac{1}{e^\pi} \simeq 0,04, \quad (44)$$

de modo que o raio da trajetória é apenas 4 por cento do seu valor na superfície.

Para a variação de pressão nesta situação, temos das Eqs. (40) e (24),

$$\delta p(x, z, t) = \zeta_0 \rho g e^{\kappa z} \cos(\kappa x - \omega t) = \rho g \zeta(x, t) e^{\kappa z}, \quad (45)$$

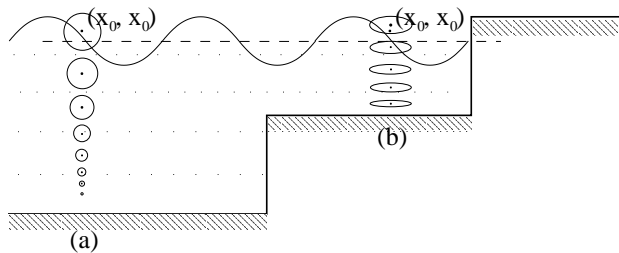


Figura 4 - Trajetórias das partículas em (a) águas profundas e (b) rasas.

e, da mesma maneira que para o raio, para a profundidade $z = -\lambda/2$ seu valor cai a 4 por cento do valor na superfície. Assim, um detector colocado no fundo de um lago não poderá detectar variações na pressão devido às ondas superficiais de gravidade cujos comprimentos de onda sejam muito menores que o dobro da profundidade do lago.

5.2. Ondas em águas rasas

Em seguida, vamos analisar as características das ondas que se propagam em regiões em que a profundidade é muito menor que o comprimento, isto é, $\kappa h = 2\pi h/\lambda \ll 1$.

Para pequenos valores de x , $\text{tgh } x \simeq x$ e, da Fig. 3 que, para $x \leq 0,45$ esta já é uma boa aproximação. Assim, a velocidade de fase (36) pode ser aproximada por

$$c = (gh)^{1/2}, \quad \text{para } \lambda \geq 14h \quad (46)$$

a qual independe do comprimento de onda, aumenta com a profundidade do líquido e está representada pela curva (c) da Fig. 2. Portanto, para águas rasas devemos ter, efetivamente, $\lambda \gg h$ enquanto que no caso de águas profundas não necessariamente precisamos ter $\lambda \ll h$ (veja Eq. (41) para a validade das aproximações utilizadas).

Para ondas que chegam em uma praia com profundidade $h = 1$ metro com intervalos regulares de 8 s, a velocidade de propagação é de $c = 11 \text{ km/h}$ e o comprimento de onda é $\lambda = 25 \text{ m}$. Neste exemplo, as ondas apresentam uma redução de 75 por cento na velocidade de propagação e no comprimento de onda quando passam de águas profundas para regiões com pouca profundidade (veja seção 5.1).

Para pequenos valores de x , $\sinh x \simeq x$ e $\cosh x \simeq 1$; assim, as componentes de velocidade (31), são aproximadas por

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\omega \zeta_0}{\kappa h} \cos(\kappa x - \omega t), \\ v_z &= \omega \zeta_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right) \sin(\kappa x - \omega t), \end{aligned} \quad (47)$$

sendo a componente vertical nula para $z = -h$.

Integrando as Eqs. (47) em relação ao tempo, obtemos para as trajetórias das partículas

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -\frac{\zeta_0}{\kappa h} \sin(\kappa x_0 - \omega t), \\ z - z_0 &= \zeta_0 \left(1 + \frac{z_0}{h}\right) \cos(\kappa x_0 - \omega t), \end{aligned} \quad (48)$$

que representam elipses com centro em (x_0, z_0) em que o semi-eixo maior é constante e o semi-eixo menor diminui com a profundidade até se anular para $z_0 = -h$, como ilustrado na curva (b) da Fig. 4.

Para esta região, a variação linearizada para a pressão (40) torna-se

$$\delta p(x, t) = \rho g \zeta_0 \cos(\kappa x - \omega t), \quad (49)$$

que independe da profundidade. Com a Eq. (24) reescrevemos a equação anterior como

$$\delta p(x, t) = \rho g \zeta(x, t), \quad (50)$$

cuja forma é a mesma da pressão hidrostática $\rho g z$. Neste caso, ao contrário do que ocorre quando vale a aproximação de águas rasas Eq. (45), um sensor de pressão colocado em $z = -h$ pode, em princípio, detectar as flutuações na pressão, uma vez que a forma de δp não é atenuada pela função $e^{\kappa z}$.

6. Considerações finais

No desenvolvimento deste trabalho pudemos mostrar que, através de um potencial escalar que é solução de uma equação de onda, é possível determinar as velocidades e trajetórias das partículas de um líquido inicialmente em repouso e com profundidade constante, percorrido por uma perturbação sinusoidal na superfície líquida bem como, as flutuações de pressão nos diferentes pontos do fluido. Verificamos, através de uma teoria linearizada, que as ondas com pequenas amplitudes que se propagam no líquido, o fazem com diferentes velocidades que dependem da profundidade local. Este fato permite-nos compreender, por exemplo, porque as frentes de onda chegam à praia praticamente paralelas à linha da praia. Quando as ondas provenientes das regiões mais profundas, portanto com maiores velocidades de fase, se aproximam das regiões mais rasas, experimentam uma diminuição de velocidade, de modo que as ondas sofrem seguidas refrações e passam a propagar-se numa direção que é perpendicular à linha da praia, como mostrado na Fig. 5.

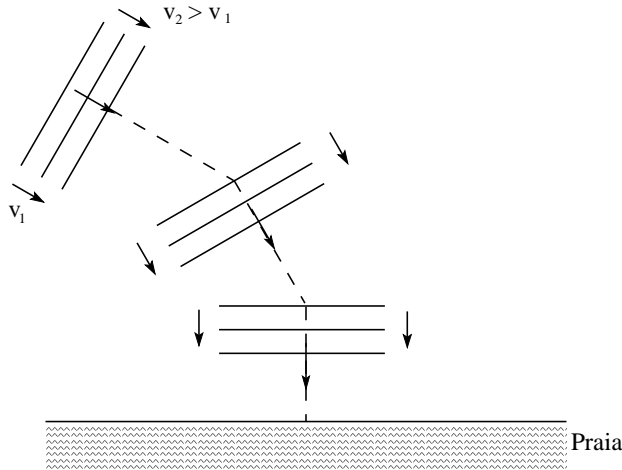


Figura 5 - Aproximação de frentes de onda da praia.

Apêndice: Equação de Bernoulli

A equação de conservação do momento linear para um fluido não viscoso com densidade $\rho(\mathbf{r}, t)$, pressão $p(\mathbf{r}, t)$ e submetido à força externa específica $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, também denominada equação de Euler, é

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla p = \rho \mathbf{f}, \quad (A.1)$$

onde $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ representa as componentes da velocidade do fluido. Se a força externa específica é conservativa podemos relacioná-la ao potencial escalar $\varphi(\mathbf{r}, t)$ por

$$\mathbf{f} = -\nabla \varphi. \quad (A.2)$$

Para um fluxo irrotacional, a identidade vetorial $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(v^2/2) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = 0$, permite escrever que

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right), \quad (A.3)$$

de modo que, com as Eqs.(A.2) e (A.3), temos para a Eq. (A.1)

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) \right] + \nabla p = -\rho \nabla \varphi. \quad (A.4)$$

Podemos introduzir o potencial escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ para velocidade através da Eq. (9) e, para um fluido incompressível ($\rho = \text{const.}$), temos para a equação anterior

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi \right] = 0, \quad (A.5)$$

ou seja,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi = \mathcal{F}(t), \quad (A.6)$$

onde a função $\mathcal{F}(t)$ não depende da posição e pode ser absorvida pela redefinição do potencial $\phi(\mathbf{r}, t)$ de modo que o campo de velocidades da Eq. (9) permanece inalterado.

Para o campo gravitacional

$$\varphi = gz, \quad (A.7)$$

é a energia potencial gravitacional por unidade de massa e a Eq. (A.6) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0, \quad (A.8)$$

que é a forma da equação de Bernoulli dependente do tempo, aplicável a um fluido incompressível, não viscoso situado num campo gravitacional e que experimenta um fluxo irrotacional.

Referências

- [1] S. Meirelles e N. Violante Carvalho, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **29**, 4 (2007).
- [2] M. Alonso e E.J. Finn, *Física* (Addison-Wesley Longman, São Paulo, 1992).
- [3] J. Lighthill, *Waves in Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1978).
- [4] M.S.D. Cattani, *Elementos de Mecânica dos Fluidos* (Edgard Blücher, São Paulo, 1990).
- [5] K.R. Symon, *Mecânica* (Editora Campus, Rio de Janeiro, 1982).