

Abordando a dinâmica de fluidos por uma via intuitiva, embora de validade restrita: princípio da superposição (Facing fluid dynamics through a friendly shortcut though of limited validity: the superposition principle)

Marcus V.C. Ramalho¹ e Marcus B.L. Santos

Instituto de Física, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil
Recebido em 15/6/2008; Aceito em 9/9/2008; Publicado em 27/2/2009

O princípio da superposição é invocado de maneira ampla na física, mas o estudante deve ter em mente que sua validade limita-se às situações regidas por equações lineares. Tal é o caso do eletromagnetismo, em contraste com a dinâmica de fluidos. Nesta última, as equações são em geral não-lineares, podendo contudo se reduzir a equações lineares num caso particular de grande interesse, capaz inclusive de abranger situações dependentes do tempo. O objetivo desse artigo de cunho pedagógico é explorar as analogias deste caso com o eletromagnetismo, de forma a possibilitar uma introdução rápida à dinâmica de fluidos por parte do estudante não familiarizado com este ramo fascinante porém geralmente ausente da formação do físico. Nesse processo daremos ênfase ao traçado de linhas de corrente mediante o uso de ferramentas gráficas computacionais que, acreditamos, facilitarão ao estudante a percepção da analogia mencionada.

Palavras-chave: dinâmica de fluidos, analogias eletromagnéticas.

The superposition principle is widely invoked in physics. However, the student should bear in mind that its validity implies that the system under focus is governed by linear equations. Such a condition is usually fulfilled in electromagnetism, but not in fluid dynamics, where the governing equations are generally non-linear ones. Nevertheless, such equations become linear in an important particular case, which applies even to time dependent situations. Our aim in this pedagogical article is to explore the analogies of such a case with electromagnetism. We believe that this approach can make easier to introduce fluid dynamics to a typical student, generally not acquainted at all with the principles of this branch of increasing importance in physics. We emphasize the plot of streamlines by making use of computational graphical tools which hopefully helps to clarify the proposed pedagogical strategy.

Keywords: fluid dynamics, electromagnetic analogies.

1. Introdução

A abordagem contida nesse artigo pedagógico visa promover um *upgrade* considerável no conhecimento do estudante sobre dinâmica de fluidos, assumindo como ponto de partida apenas noções básicas em nível de física geral [1], além de ter cursado um semestre de teoria eletromagnética.

1.1. Equações fundamentais

Adotando algumas hipóteses simplificadoras do ponto de vista termodinâmico [2], as equações que governam o fluido são as seguintes:

- Continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

¹E-mail: marcus@fis.unb.br.

onde ρ é a densidade e \mathbf{v} o campo de velocidades do fluido. Duas observações sobre a Eq. (1) são:

1) Equação análoga àquela satisfeita pela carga elétrica no eletromagnetismo [3].

2) Simplifica-se no caso em que a densidade é constante em todos os pontos (fluido *incompressível*). Em geral se as velocidades de escoamento são muito menores que a velocidade do som não precisamos nos preocupar com variações de densidade. Nesse caso, podemos escrever

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

- Equação de movimento:

Da 2ª lei de Newton

$$\rho \times (\text{aceleração}) = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f},$$

onde f é a densidade da força resultante atuando sobre um elemento do fluido. Desmembrando f em 3 parcelas, temos

$$f = f_{press} + f_{campos} + f_{visc},$$

onde f_{press} representa as forças de pressão (por unidade de volume), f_{campos} as forças devidas a campos externos, por exemplo a gravidade, e f_{visc} as forças de viscosidade, isto é, o atrito interno que existe em qualquer fluido real. Entretanto, no contexto visado por esse artigo (escoamento potencial) será suficiente assumir um *fluido ideal*, isto é, com viscosidade nula.

As duas densidades de força remanescentes podem ser expressas matematicamente sem muita dificuldade [4] como segue

$$f_{press} = -\nabla p \text{ e } f_{campos} = -\rho \nabla \phi_{ext},$$

onde p é a pressão e ϕ_{ext} é o potencial externo por unidade de massa, para algum campo conservativo externo atuando sobre o fluido. Por exemplo, no caso da gravidade, $\phi_{ext} = gz$, onde adotamos como referência do potencial a coordenada vertical $z = 0$.

1.1.1. Derivada ‘seguido o fluido’

Na Mecânica usual, de uma partícula, a aceleração é simplesmente a derivada temporal $d\mathbf{v}/dt$. No caso de um meio contínuo temos o conceito de ‘derivada material’, que envolve acrescentar também os termos espaciais. Dito de outra forma, necessitamos aqui da derivada no referencial da partícula em movimento, isto é, ‘seguido o fluido’. Considerando um volume elementar de fluido de forma cúbica, para facilitar, podemos escrever em coordenadas cartesianas

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

onde identificamos dx/dt com a componente v_x , etc. Portanto, a equação de movimento para o fluido ideal (equação de Euler) pode ser expressa como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi_{ext}. \quad (3)$$

Repare o leitor na presença do termo não-linear, $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Soluções exatas para esta equação são escassas, e a situação tende a piorar diante de problemas complexos que surgem nas aplicações práticas [5] envolvendo fluidos reais. Isso levou ao desenvolvimento de sofisticadas técnicas de simulação numérica em meios contínuos (CFD - ‘Computational Fluid Dynamics’). Entretanto, tal abordagem escapa ao nosso objetivo aqui, justamente buscar situações particulares que gerem soluções exatas, mesmo que bastante idealizadas.

Recapitulando, as Eqs. (1) e (3) descrevem o escoamento de um fluido ideal em situações razoavelmente gerais, com as ressalvas feitas no início desta Introdução. A seguir, na seção 2 discutimos as condições

em que essas equações se tornam lineares e a correspondente analogia com o eletromagnetismo. Na seção 3 são dados exemplos de uso do princípio da superposição para obter solução de alguns escoamentos simples. Tais exemplos são acompanhados de ilustrações obtidas via pequenos programas computacionais. Para o leitor interessado nessa parte de programação, algumas rotinas são fornecidas no Apêndice (códigos em EXCEL e MATLAB). Finalmente, o artigo se encerra com uma breve Conclusão.

2. Caso linear: escoamento potencial incompressível

Um desenvolvimento interessante surge ao transformar a Eq. (3) usando a identidade vetorial

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}).$$

Substituindo, a equação de movimento assume a forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{2} \nabla v^2 - \nabla \phi_{ext}. \quad (4)$$

Nesse ponto é conveniente definir

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (5)$$

De fato, $\text{rot } \mathbf{v}$, ou $\boldsymbol{\Omega}$, define um campo vetorial chamado vorticidade, ou função turbilhão, cujo significado vincula-se à noção de circulação no fluido em movimento [4]. Fisicamente, um escoamento rotacional (*i.e.*, com $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$) transporta momento angular. Na prática, isso às vezes pode ser visualizado em cursos d’água mediante a observação de pequenos objetos girando (tal como rodinhas de pás).

Repare que se o escoamento for incompressível, $\rho = \text{const.}$, o que torna o membro direito da Eq. (4) um gradiente puro. Logo, tomando-se o rotacional em ambos os membros o resultado será a eliminação da pressão. A equação de movimento fica

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = 0, \quad (6)$$

e o escoamento passa a ser regido pelo conjunto de Eqs. (2), (5) e (6).

Finalmente, as equações tornam-se lineares para os chamados escoamentos *irrotacionais*, isto é, aqueles nos quais $\boldsymbol{\Omega} = 0$ em qualquer ponto do fluido. Note que basta esta condição se verificar num instante de tempo qualquer, e a Eq. (6) assegura que ela será válida para sempre... (para uma discussão aprofundada dessa e de outras ‘esquisitices’ do fluido ideal, recomendamos ao leitor a Ref. [4]).

Portanto, vemos que um escoamento irrotacional e incompressível é regido pelas equações lineares

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0, \quad (7)$$

em evidente analogia com a descrição matemática da eletrostática e da magnetostática, bastando substituir em cada caso \mathbf{v} por \mathbf{E} ou \mathbf{B} , respectivamente. Tal como naquelas situações, a equação $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ permite definir um potencial escalar ϕ , de sorte que a velocidade em qualquer ponto pode ser expressa como o gradiente desse potencial velocidade, ou seja,

$$\mathbf{v} = \nabla \phi. \quad (8)$$

Decorre daí a denominação de *escoamento potencial*, alternativa para irrotacional. O leitor atento lembrará, contudo, que a descrição linear (e portanto a validade do princípio da superposição) requer também que a condição de incompressibilidade seja satisfeita. Substituindo na Eq. (2) temos então

$$\nabla^2 \phi = 0,$$

ou seja, um escoamento potencial incompressível satisfaz a equação de Laplace.

3. Escoamentos simples obtidos por superposição

Essa seção tem um certo caráter de divertimento. Propomos ao leitor ‘brincar’ um pouco de encontrar soluções para escoamentos simples, usando mais a intuição e, claro, o princípio da superposição. Afinal, depois de deparar com a aridez de equações não-lineares, eis que nos encontramos ‘em casa’, em companhia da equação de Laplace, ‘velha de guerra’...

Como ‘munição’, mostramos uma pequena série de exemplos, em ordem crescente de dificuldade. Daí em diante o leitor poderá continuar, seja somente em bases teóricas ou utilizando os programas computacionais fornecidos no Apêndice, ou ainda mediante outras ferramentas computacionais de sua preferência.

Vale observar que, apesar das restrições que condicionam a validade das equações linearizadas, elas nos permitem obter, em princípio, um sem número de soluções para o escoamento potencial. Embora estejamos tratando de um fluido ideal, não se deve subestimar a importância do modelo de escoamento potencial para a hidrodinâmica. Um argumento para suportar esta afirmação será dado no final, após a discussão dos exemplos.

3.1. Função corrente; linhas de corrente

Da mesma maneira que as linhas de campo nos ajudam a formar uma imagem acerca de determinada configuração de campos elétricos ou magnéticos, no caso de fluidos temos as chamadas linhas de corrente (*streamlines*, em inglês). Por definição, uma linha de corrente é uma linha tangente ao vetor velocidade em qualquer ponto. De fato, a utilidade desse conceito é maior no

caso de um escoamento *estacionário*, isto é, independente do tempo [5]. Para traçar linhas de corrente, é útil definir a chamada função corrente, ψ [2, 5]. Para escoamentos bidimensionais (isto é, as quantidades físicas praticamente independem da coordenada z) essa definição pode ser escrita assim

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (9)$$

ou, em termos das coordenadas polares r e θ ,

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (10)$$

Também em geometrias com simetria axial as linhas de corrente são úteis, mas a função corrente tem que ser redefinida de forma adequada [6]. Nesse artigo vamos considerar apenas exemplos bidimensionais.

3.2. Exemplos de escoamentos simples obtidos por superposição

Vamos começar considerando dois campos de escoamento bem básicos, que servirão de ponto de partida para as superposições. A Fig. 1 mostra um escoamento radial originado de uma fonte linear, vista de frente (*i.e.*, a fonte linear está orientada perpendicularmente ao plano do papel). A condição de continuidade impõe que a vazão de fluido através da superfície de um cilindro (de comprimento unitário) concêntrico ao eixo da fonte, para qualquer valor do raio r do cilindro, seja constante, igual a q , a intensidade da fonte, ou seja

$$v(2\pi r) = q, \quad (11)$$

o que implica em $v \propto 1/r$. De passagem, vale lembrar novamente as situações análogas na eletrostática (fio fino uniformemente carregado) e na Magnetostática (fio retilíneo infinito percorrido por corrente elétrica). A função corrente para a fonte linear decorre da integração de equações da forma da Eq. (10), tendo em conta a Eq. (11)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{q}{2\pi r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad (12)$$

resultando

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \theta. \quad (13)$$

Fica evidente da Eq. (13) que as linhas de corrente (linhas de $\psi = \text{constante}$) são linhas radiais, tal como esquematizado na Fig. 1.

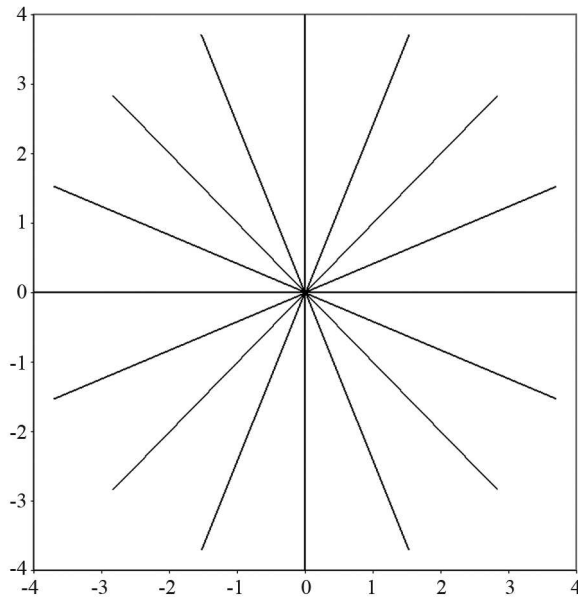


Figura 1 - Escoamento radial de uma fonte linear (setas para fora subtendidas).

O segundo campo de velocidades básico é o escoamento uniforme, paralelo ao eixo- x , de velocidade U , ilustrado na Fig. 2. Alternativamente poderíamos obtê-lo da porção central do escoamento entre uma fonte e um sorvedouro (de intensidades q e $-q$, respectivamente), no limite em que o afastamento entre esses elementos tende para o infinito. A função corrente para o escoamento uniforme é $\psi = Uy$, ou

$$\psi = U \operatorname{sen} \theta, \quad (14)$$

como pode ser trivialmente visto das Eqs. (9) ou (10).

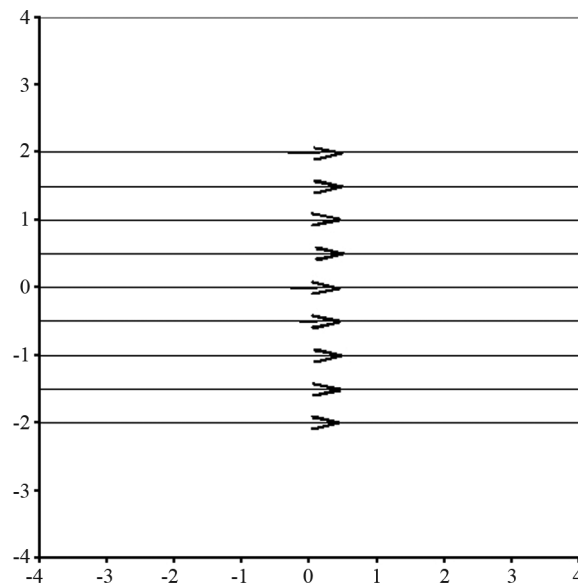


Figura 2 - Escoamento uniforme na direção $+x$. As setas apontando para a direita serão subtendidas nas figuras seguintes.

Nesse ponto já podemos começar a ‘jogar’ com a superposição, combinando a fonte linear com o escoamento uniforme. A função corrente resultante é

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_{unif} + \psi_{fonte} \\ &= Ur \operatorname{sen} \theta + \frac{q}{2\pi} \theta. \end{aligned} \quad (15)$$

É evidente que em algum ponto do eixo- x negativo a velocidade devida à fonte cancelará exatamente a do escoamento uniforme, gerando um *ponto de estagnação*. Da Eq. (11) vemos que o ponto de estagnação estará localizado em $x = -b$, onde $b = q/2\pi U$. O valor da função corrente nesse ponto pode ser calculado da Eq. (15) tomando $r = b$ e $\theta = \pi$, que leva a $\psi_{estag} = q/2$. Como $q = 2\pi Ub$, segue que a equação da linha de corrente passando pelo ponto de estagnação é

$$\pi Ub = Ur \operatorname{sen} \theta + Ub\theta$$

ou

$$r = \frac{b(\pi - \theta)}{\operatorname{sen} \theta},$$

onde θ pode variar entre 0 e 2π . Portanto, o gráfico dessa linha de corrente coincide com o eixo- x negativo até atingir o ponto de estagnação, quando então bifurca. Se substituirmos essa linha de corrente por uma superfície sólida, fica claro que a combinação de uma fonte e uma corrente uniforme permite descrever o escoamento em torno de um certo ‘perfil aerodinâmico’ definido dessa forma. Na Fig. 3 várias linhas de corrente (isolinhas $\psi = \text{constante}$) desse escoamento foram traçadas em torno deste, assim chamado, ‘corpo semi-aberto’ (cujo traçado não aparece na figura).

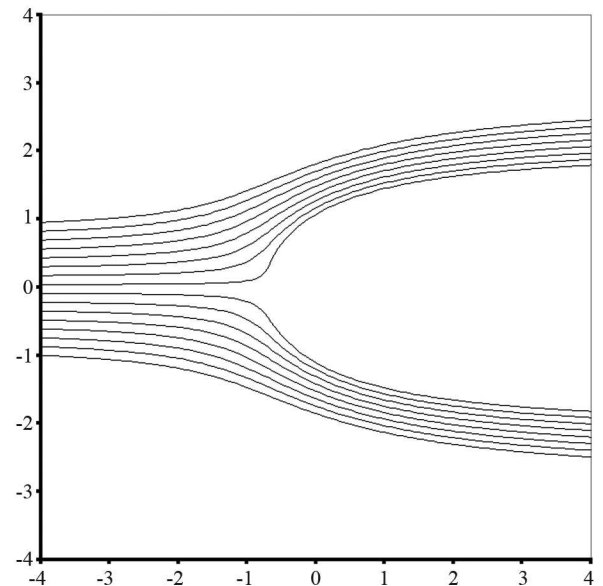


Figura 3 - Superposição dos dois escoamentos anteriores: linhas de corrente para alguns valores constantes da função corrente ψ . A superfície sólida (corpo semi-aberto) correspondente a $\psi = 0$ não foi computada.

Um desenvolvimento natural seguinte seria tentar fechar esse perfil. Para isso precisamos apenas criar um novo ponto de estagnação correnteza abaixo. A forma mais simples de fazer isso é colocar um sorvedouro de intensidade $-q$ em $x = b$. A função corrente nesse caso seria da forma

$$\psi = \psi_{unif} + \psi_{fonte} + \psi_{sorvedouro} .$$

Nesse ponto cabe uma pequena digressão matemática acerca do par fonte e sorvedouro, pura e simplesmente. Sua função corrente é

$$\psi_{par} = \psi_{fonte} + \psi_{sorvedouro} = -\frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) ,$$

onde θ_1 e θ_2 são as coordenadas angulares referentes às origens centradas no sorvedouro e na fonte, respectivamente. De forma mais conveniente, essa função corrente pode ser expressa em termos da coordenada angular θ correspondente à origem do sistema de coordenadas. Após alguma manipulação algébrica [5] chega-se a

$$\psi_{par} = -\frac{q}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2br \operatorname{sen}\theta}{r^2 - b^2} \right) . \quad (16)$$

A soma dessa expressão à do escoamento uniforme leva então, de fato, ao escoamento em torno de um perfil fechado, chamado *oval de Rankine*, que corresponderá à linha de corrente $\psi = 0$. Algumas isolinhas para este escoamento foram traçadas na Fig. 4.

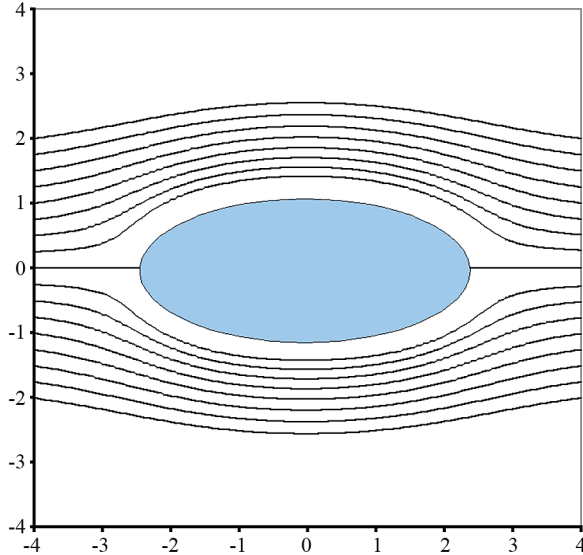


Figura 4 - Superposição de uma fonte e um sorvedouro lineares localizados sobre o eixo- x mais um escoamentos uniforme paralelo ao mesmo eixo: a superfície sólida (oval de Rankine) foi representada apenas de maneira esquemática (não computada).

O leitor que teve paciência de acompanhar o raciocínio até aqui pode se sentir recompensado, pois nesse ponto está apto a obter um resultado bastante relevante! Trata-se do escoamento ideal em torno de

um cilindro circular. Para tanto, voltemos à Eq. (16) para ψ_{par} . Para pequenos valores de b

$$\psi_{par} \approx -\frac{qbr \operatorname{sen}\theta}{\pi(r^2 - b^2)} , \quad (17)$$

pois para pequenos ângulos a tangente se aproxima do ângulo. O chamado *dubleto* ocorre em analogia com o dipolo (elétrico ou magnético) tomando o limite $b \rightarrow 0$, enquanto a intensidade $q \rightarrow \infty$, de tal forma que o produto qb permaneça constante. Logo, chegamos a

$$\psi_{dubl} = -\frac{K \operatorname{sen}\theta}{r} , \quad (18)$$

onde $K = qb/\pi$ é chamado intensidade do dubleto. As isolinhas para esse dubleto têm a forma circular [5] característica das linhas de campo de um dipolo elétrico ou magnético *linear* (*i.e.*, bidimensional). Finalmente, fica óbvio que o resultado procurado para o escoamento em torno do cilindro circular surge de tomar o caso do oval de Rankine nesse mesmo limite, ver Fig. 5.

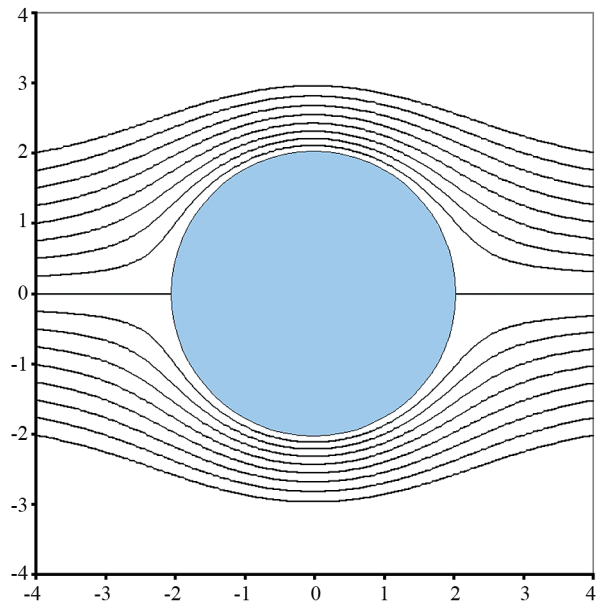


Figura 5 - Escoamento ideal em torno de um cilindro: o caso limite do dubleto aplicado ao oval de Rankine da Fig. 4.

Para terminar nossa série de exemplos, vamos adicionar um ingrediente novo, considerando o fluido dotado de um movimento de rotação em torno do cilindro. Ou seja, as linhas de corrente desse novo ingrediente são círculos concêntricos. Mas, lembre-se o leitor, temos que preservar a condição $\operatorname{rot} v = 0$, de modo a garantir nosso contexto de validade do princípio da superposição. Portanto, nosso escoamento de linhas concêntricas é derivável de um potencial, que forçosamente assumirá a forma

$$\phi = C\theta , \quad (19)$$

onde C é uma constante. Ou seja, temos aqui um intercâmbio entre as formas de ϕ e ψ com relação à fonte

(linear) da Fig. 1. Trata-se de uma situação que pode parecer estranha, a de um escoamento com rotacional nulo e linhas de corrente circulares, o chamado *vórtice livre*. Mas na verdade não há problema nenhum, uma vez que o rotacional está ligado à rotação do elemento de fluido, e não à trajetória seguida por ele. A forma da função corrente para esse escoamento é

$$\psi_{vórtice} = -C \ln r, \quad (20)$$

pois, de acordo com as Eqs. (19) e (10), e lembrando que $v_r = 0$, temos que

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{C}{r}. \quad (21)$$

Esse resultado indica que a velocidade varia inversamente com r , o que implica numa singularidade na origem. No caso que nos interessa aqui, da circulação em torno do cilindro, isso não causa problema. Adicionando portanto $\psi_{vórtice}$ ao escoamento da Fig. 5, obtemos o escoamento esquematizado na Fig. 6, que por si só já sugere, pela quebra de simetria devida à rotação, o aparecimento de uma força de sustentação (efeito Magnus – ver mais sobre forças hidrodinâmicas, por ex. na Ref. [5]). Aproveitando o programa fornecido, o leitor poderá simular maior velocidade de giro do cilindro, até observar o ponto de estagnação descolar-se do mesmo.

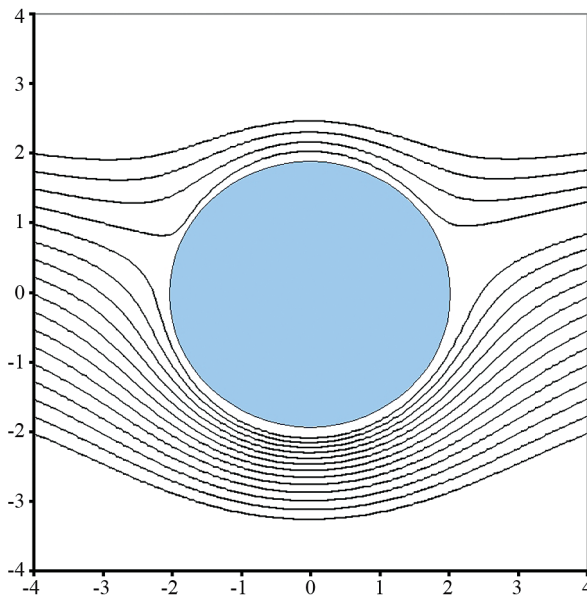


Figura 6 - Escoamento ideal em torno de um cilindro girante (sentido anti-horário): aparecimento de uma força de sustentação (efeito Magnus).

Na trilha dos exemplos examinados aqui, o leitor também poderá criar outros escoamentos mediante superposição de soluções conhecidas. Seguem algumas sugestões:

- Duas fontes (lineares) de mesma intensidade
- Duas fontes e dois sorvedouros dispostos em geometria quadripolar.

- Um vórtice mais uma fonte (modelo para um espalhador de jardim, ou ainda, uma galáxia espiral).
- Um escoamento uniforme paralelo ao eixo- x e dois vórtices (lineares), girando em sentidos contrários, localizados no eixo- y (leva aos ovais de Kelvin [5]).

Cada superposição imaginada, contudo, corresponde a uma soma de funções que precisará ser trabalhada de forma específica, tal como aconteceu com os exemplos mostrados. Afora esse inconveniente (que pode ser minorado pelo uso da ‘força bruta’ computacional) não há limite para se criar novas soluções por superposição. No caso que abordamos de problemas bidimensionais, a capacidade de gerar soluções fica ainda mais potencializada pelo uso de variáveis complexas (veja Ref. [4, cap. 7]). Finalmente, para o leitor interessado em explorar também escoamentos axissimétricos, recomendamos consultar o livro de Streeter [8], um clássico.

3.3. E a viscosidade?...

Finalmente, vamos agora ao comentário anunciado no início da seção. Tendo investido em resolver equações para determinar escoamentos, em diversas geometrias, para esse estranho fluido ideal, o leitor pode estar se perguntando, com justa preocupação: ‘Mas, será que na hora de tentar descrever o escoamento de um fluido real tudo muda? Será que teremos que jogar fora todo o trabalho feito?...’ A boa notícia é que a resposta a essa pergunta é negativa, ao menos em parte, já que em termos de aproximação, de fato, nem tudo muda não. A razão para isso ficou clara a partir do trabalho de Prandtl, em 1904, com a descoberta da camada limite [6, 7] que aparece no fluido, na região adjacente a uma superfície sólida. A consequência é que as mudanças acontecem essencialmente apenas no interior dessa camada, e a solução para o escoamento fora dessa região coincide praticamente com aquela prevista para o escoamento potencial.

Ao considerar a viscosidade, vale mencionar que outras situações de validade do princípio da superposição podem ocorrer em fluidos, como por exemplo, no regime altamente viscoso [6]. Entretanto, nenhuma dessas aproximações possui a aplicabilidade ampla – inclusive a problemas dependentes do tempo – do escoamento potencial incompressível que analisamos no presente artigo.

4. Conclusão

Como afirmou Feynman [4, § 40-2], ‘eletrodinâmica é mais fácil que hidrodinâmica’, e uma das razões para isso é a presença de não-linearidades na segunda. Some-se aí a ausência, ou não obrigatoriedade da disciplina nos currículos, e está formado um círculo vicioso que

leva o estudante naturalmente a ignorar um ramo da física cuja importância, no entanto, não para de crescer. Nesse artigo tentamos combater esse ‘alheamento’, por assim dizer, procurando abordar a matéria pela sua faceta mais familiar, ou seja, o caso particular de linearidade, e que exibe analogia com o eletromagnetismo. Mesmo sendo esta analogia encontrável em textos clássicos do assunto, a presente abordagem é, ao nosso conhecimento, inédita, em função do atalho adotado, visando chegar logo ao ponto que enfatizamos. Além desta estratégia teórica, cremos que as demonstrações computacionais somam em motivação, ao mostrar que pela elaboração de pequenos programas com ferramentas computacionais usuais se pode mapear

escoamentos simples, enriquecendo assim a introdução pretendida.

Apêndice

Neste Apêndice fornecemos modelos de programas EXCEL e MATLAB usados para traçar linhas de corrente. As figuras aqui apresentadas se originam do programa em EXCEL. A opção de usar o MATLAB pode também ser interessante, não somente pela popularidade [9] desse programa, mas também pela possibilidade de se trabalhar com algum *software* livre similar do mesmo (p. ex., Octave).

Codigo Excel (R)

```
Sub Macro1() ' ' Dim Vx, Vy, Vel, ParVal1, ParVal2, GamaVal,
XStream, YStream As Double

Worksheets("Saida").Select Cells.Select Selection.ClearContents
Range("A1").Select

Worksheets("Entrada").Select

TipoCel = ActiveSheet.Cells(3, 1).Value Vel = ActiveSheet.Cells(3,
2).Value 'Velocidade do escoamento uniforme

If TipoCel = 1 Then 'Caso corpo semi-aberto
    ParVal1 = ActiveSheet.Cells(3, 3).Value
    ParVal2 = 0
    GamaVal = 0
ElseIf TipoCel = 2 Then 'Caso oval de Rankine
    ParVal1 = ActiveSheet.Cells(3, 3).Value
    ParVal2 = ActiveSheet.Cells(3, 4).Value
    GamaVal = 0
ElseIf TipoCel = 3 Then 'Caso cilindro
    ParVal1 = ActiveSheet.Cells(3, 4).Value
    ParVal2 = 0
    GamaVal = 0
ElseIf TipoCel = 4 Then 'Caso cilindro com circulacao
    ParVal1 = ActiveSheet.Cells(3, 4).Value
    ParVal2 = 0
    GamaVal = ActiveSheet.Cells(3, 5).Value
End If

XStreamMin = ActiveSheet.Cells(3, 7).Value 'Le dados relativos a '
posicao das linhas de corrente desejadas XStreamMax =
ActiveSheet.Cells(3, 8).Value DxStream = ActiveSheet.Cells(3,
9).Value Y0StreamMin = ActiveSheet.Cells(3, 10).Value Y0StreamMax
= ActiveSheet.Cells(3, 11).Value Dy0Stream = ActiveSheet.Cells(3,
12).Value

Xs = XStreamMin Ys = Y0StreamMin Ys0 = Ys

Worksheets("Saida").Select IndStream = 0

' A sequencia seguinte calcula as coordenadas y de cada linha de '
corrente para os dados valores de x (espaçados por DxStream) ' por
um algoritmo ' de 'marcha no espaco' a partir de XStreamMin ' e
```

com base na definicao de linha de corrente, ($dy/dx = vy/vx$). ' As componentes de velocidade vx e vy sao computadas pelas funcoes ' vflowx e vflowy. Nestas, o calculo e feito explicitamente com base ' nas expressoes obtidas pela teoria de superposicao de solucoes ' da equacao de Laplace em duas dimensoes

```

While Ys0 <= Y0StreamMax

    IndStream = IndStream + 1
    Xs = XStreamMin
    Ys = Ys0

    i = 1

    While Xs <= XStreamMax

        i = i + 1

        XStream = Xs
        YStream = Ys

        If IndStream = 1 Then
            ActiveSheet.Cells(i, 1).Value = XStream
        End If

        Vx = vflowx(TipoCel, Vel, ParVal1, ParVal2, GamaVal, XStream, YStream)
        Vy = vflowy(TipoCel, Vel, ParVal1, ParVal2, GamaVal, XStream, YStream)

        Xs = Xs + DxStream
        Ys = Ys + Vy / Vx * DxStream

        ActiveSheet.Cells(i, IndStream + 1).Value = Ys

    Wend

    Ys0 = Ys0 + Dy0Stream

Wend

ActiveSheet.Cells(1, 1).Select

' Formatacao da figura

Sheets("Figura").Select

ActiveChart.PlotArea.Select Selection.Width = 445 Selection.Height
= 420 Selection.Top = 21 ActiveChart.Axes(xlValue).Select With
ActiveChart.Axes(xlValue)
    .MinimumScale = -4
    .MaximumScale = 4
    .MinorUnitIsAuto = True
    .MajorUnitIsAuto = True
    .Crosses = xlCustom
    .CrossesAt = -4
End With ActiveChart.Axes(xlCategory).Select With
ActiveChart.Axes(xlCategory)
    .MinimumScale = -4
    .MaximumScale = 4
    .MinorUnitIsAuto = True
    .MajorUnitIsAuto = True
    .Crosses = xlCustom
    .CrossesAt = -4

```



```

End With

End Sub

Function vflowx(tipo, U, par1, par2, gama, x, y)

'Calcula a componente vx do escoamento determinado pelo argumento
"tipo"

If x = 0 And y = 0 Then
    x = x + 0.001
    y = y + 0.001
End If

If tipo = 1 Then 'Corpo semi-aberto ' par1 denota a intensidade da
fonte
    vflowx = U + par1 * x / (2 * 3.1416 * (x ^ 2 + y ^ 2))
ElseIf tipo = 2 Then 'Oval de Rankine ' par1 denota a intensidade
da fonte, par2 a distancia entre fonte ' e sorvedouro
    vflowx = U - par1 / (2 * 3.1416) * 2 * par2
    * (x ^ 2 - y ^ 2 - par2 ^ 2) / ((x ^ 2 + y ^ 2 - par2 ^ 2) ^ 2
    + 4 * par2 ^ 2 * y ^ 2)
ElseIf tipo = 3 Then 'Cilindro circular ' par1 denota o raio do
cilindro
    vflowx = U * (1 + par1 ^ 2 / (x ^ 2 + y ^ 2) ^ 2 * (y ^ 2 - x ^ 2))
ElseIf tipo = 4 Then 'Cilindro com rotacao ' par1 denota o raio do
cilindro, e gama a circulacao
    vflowx = U * (1 + par1 ^ 2 / (x ^ 2 + y ^ 2) ^ 2 * (y ^ 2 - x ^ 2))
    - gama * y / (2 * 3.1416 * (x ^ 2 + y ^ 2))
End If

End Function Function vflowy(tipo, U, par1, par2, gama, x, y)

'Calcula a componente vy do escoamento determinado pelo argumento
"tipo"

If x = 0 And y = 0 Then
    x = x + 0.001
    y = y + 0.001
End If

If tipo = 1 Then 'Corpo semi-aberto ' par1 denota a intensidade da
fonte
    vflowy = par1 * y / (2 * 3.1416 * (x ^ 2 + y ^ 2))
ElseIf tipo = 2 Then 'Oval de Rankine ' par1 denota a intensidade
da fonte, par2 a distância entre fonte ' e sorvedouro
    vflowy = -par1 / (2 * 3.1416) * 4 * par2 * x * y /
    ((x ^ 2 + y ^ 2 - par2 ^ 2) ^ 2 + 4 * par2 ^ 2 * y ^ 2)
ElseIf tipo = 3 Then 'Cilindro circular ' par1 denota o raio do
cilindro
    vflowy = -2 * U * par1 ^ 2 * x * y / (x ^ 2 + y ^ 2) ^ 2
ElseIf tipo = 4 Then 'Cilindro com rotacao ' par1 denota o raio do
cilinro, e gama a circulacao
    vflowy = -2 * U * par1 ^ 2 * x * y / (x ^ 2 + y ^ 2) ^ 2
    + gama * x / (2 * 3.1416 * (x ^ 2 + y ^ 2))
End If

End Function

=====
Codigo Matlab (R)

```

```

Function [c,h]=DrawStream(tipo,VecPar)

% "tipo" e uma "string" que indica o tipo de escoamento,
% conforme indicado abaixo
% VecPar é um vetor de parametros

clear Psi close all [x,y] = meshgrid(-10:0.1:10,-10:0.1:10);

Vel=VecPar(1); % Velocidade do escoamento uniforme

if tipo == 'Semi-aberto',
    ParVal1 = VecPar(2); % Intensidade da fonte
    Psi = Vel*y + ParVal1/(2*3.1416)*atan(y./x);
else if tipo == 'Rankine',
    ParVal1 = VecPar(2); % Intensidade da fonte/sorvedouro
    ParVal2 = VecPar(3); % Distancia entre fonte e sorvedouro
    Psi = Vel*y - ParVal1/(2*3.1416)*atan(2*ParVal2*y./(x.^2+y.^2-ParVal2^2));
else if tipo == 'Cilindro',
    ParVal1 = VecPar(2); % Raio do cilindro
    Psi = Vel*(y - ParVal1^2*y./(x.^2+y.^2));
else if tipo == 'CilindroCirc',
    ParVal1 = VecPar(2); % Raio do cilindro
    ParVal2 = VecPar(3); % Intensidade da circulacao
    Psi = Vel*(y-ParVal1^2*y./(x.^2+y.^2)) - ParVal2/(2*3.1416)*...
log((x.^2+y.^2).^0.5); else
    disp('Tipo de escoamento nao-valido');
    return
end;

[c,h] = contour(x,y,Psi,-10:1:10,'k'); axis([-4 4 -4 4]);axis
equal

```

Referências

- [1] Um ótimo tratamento em nível elementar encontra-se em H.M. Nussenzveig, *Física Básica* (Edgard Blücher, São Paulo, 1996), v. 2, 3ª ed.
- [2] Aspectos termodinâmicos são discutidos exhaustivamente em L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1987), 2ª ed.
- [3] Ver por exemplo, E.M. Purcell, *Electricity and Magnetism - Berkeley Physics Course, v. 2* (McGraw-Hill, Nova York, 1965).
- [4] Para mais detalhes, e também uma introdução fora de série à hidrodinâmica, ver R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison Wesley, Reading, 1964), v. 2, caps. 40 e 41 - ou na recente tradução em português da editora Bookman.
- [5] Há uma vasta literatura de livros de engenharia dedicados à dinâmica de fluidos, v. p. ex. B.L. Munson, D.F. Young and T.H. Okiishi, *Fundamentals of Fluid Mechanics* (John Wiley and Sons, Inc., Nova York, 1998) ou a tradução da editora Edgar Blücher.
- [6] D.J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics* (Clarendon, Oxford, 1990).
- [7] H. Schlichting, *Boundary Layer Theory* (McGraw-Hill, Nova York, 1979), 7ª ed.
- [8] V.L. Streeter, *Fluid Dynamics* (McGraw-Hill, Nova York, 1948).
- [9] C. Scherer, *Métodos Computacionais da Física* (Livraria da Física, São Paulo, 2005).