

Uma simples análise do equilíbrio do monociclista

(A simple analysis of the equilibrium of a unicyclist)

Jalves S. Figueira e Adriano Doff¹

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, PR, Brasil

Recebido em 6/8/2007; Aceito em 30/10/2007

Neste trabalho, discutimos o movimento de um monociclo. Em particular analisamos as condições para manter o equilíbrio do monociclista. Considerando um modelo baseado em um pêndulo invertido, determinamos as frequências que proporcionam ao monociclista uma posição de equilíbrio. Esta situação corresponde ao mínimo da energia potencial.

Palavras-chave: monociclo, pêndulo invertido, função potencial, oscilações harmônicas.

In this work we discuss the motion of a unicycle. In particular we analyze the conditions to keep the unicyclist equilibrium. Considering a model based on an inverted pendulum, we determine the frequencies which provide an equilibrium condition of the unicyclist. This situation corresponds to the minimum of the potential energy.

Keywords: unicycle, inverted pendulum, potencial function, harmonic oscillations.

1. Introdução

A arte e técnica de um equilibrista sobre uma roda fascina desde crianças até adultos. Variando o torque aplicado aos pedais, e com movimentos independentes do corpo, braços e pernas, este consegue manter-se em equilíbrio na vertical com o centro de gravidade acima do ponto de contato. Ao andar sobre uma roda, equilibrando-se na vertical, somente com o uso dos pedais e movimentos do corpo, o monociclista utiliza conceitos bem conhecidos da física. Como exemplo, pode-se destacar o fato que este aplica um torque nos pedais de forma a proporcionar uma posição de equilíbrio dinâmico, no sentido que a frequência e intensidade das pedaladas devem ter valores característicos de forma a proporcionar tal condição. Um outro conceito é o da variação de seu momento de inércia, uma vez que o monociclista necessita afastar ou trazer os braços para próximo do corpo para realizar mudanças de sua direção. Portanto, a análise do movimento realizado por um monociclo constitui um laboratório muito rico para o ensino de física, e ao mesmo tempo proporciona ao aluno um contato com a arte, no sentido que o equilibrista representa na verdade um artista circense. Dentro deste contexto, um espetáculo de circo pode ser transformado pelo professor numa aula extremamente rica.

A descrição exata do movimento do monociclo é bastante complexa, uma vez que seria necessário escrever-

mos o sistema de equações diferenciais que representa tal movimento. Esta descrição poderia ser construída com o auxílio do formalismo lagrangiano [1]. Entretanto, esta não é a meta deste trabalho. O nosso objetivo aqui é fornecer ao professor do ensino médio um recurso adicional para o enriquecimento de suas aulas.

A elaboração de um modelo para a descrição da estabilidade de um sistema dinâmico é também uma tarefa complexa. Um sistema dinâmico de forma geral pode ser representado por um sistema de n equações diferenciais

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f(x_n, t). \quad (1)$$

Os pontos de equilíbrio \bar{x} para um dado sistema dinâmico podem ser obtidos ao impormos que $f(\bar{x}, t)$ se anule, ou seja $f(\bar{x}, t) = 0$. Se $f(x, t)$ é analítica é possível efetuar a expansão em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio, ou seja

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df(\bar{x})}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \dots \quad (2)$$

Considerando apenas os dois primeiros termos desta expansão, é possível analisar o movimento em torno da posição de equilíbrio através de uma equação do tipo

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax, \quad (3)$$

¹E-mail: agomes@utfpr.edu.br.

sendo que para chegarmos nesta última a origem do sistema de coordenadas foi transladado para \bar{x} e $A = df(0)/dx$. Na Ref. [2] os autores seguem uma linha próxima a que apresentamos acima para a descrição das condições necessárias para manutenção do equilíbrio de um pêndulo invertido. Conforme o autor citado na Ref. [3] argumenta é possível extrair os principais aspectos associados ao equilíbrio de um monociclista considerando um modelo baseado em um pêndulo simples invertido, sendo esta a linha que seguiremos no presente trabalho.

Na Ref. [4] os autores utilizam a análise do movimento do monociclo como uma ferramenta para o desenvolvimento de novas idéias no campo da robótica.

Todavia, é possível realizarmos um estudo bastante rico das condições de estabilidade (ou equilíbrio) do monociclista fazendo o uso de um modelo extremamente simples, baseado na proposta sugerida na Ref. [3]. Este modelo poderia ser utilizado por um professor de física de ensino médio para contextualizar vários tópicos que são parte obrigatória no programa de física básica, como sistemas oscilatórios.

A distribuição dos tópicos que iremos abordar é apresentado na seqüência. Na seção 2, faremos uma breve descrição das características de um monociclo e a análise das condições e tipos de equilíbrio envolvidos no pedalar de um monociclista. Nas seções 3 e 4, efetuaremos respectivamente a descrição e análise do equilíbrio.

2. O monociclo e as condições para o equilíbrio

O nosso objetivo nesta seção é efetuar uma breve descrição do monociclo, bem como das condições necessárias para manter o equilíbrio do monociclista sobre o monociclo. Pode-se pensar em um monociclo como uma “bicicleta de uma roda” com diferenças significativas; não existe guidão e muito menos sistema de freio, que é feito utilizando os próprios pedais. Na Fig. 1 apresentamos as principais partes de um monociclo.

Não há literatura especializada que descreva a origem do monociclo. Todavia, sabe-se que a bicicleta é bem remota. Leonardo da Vinci (1452-1519) possuía projetos de transmissão com correia e roda dentada para uma bicicleta. Acredita-se que o monociclo surgiu por acidente, a partir do velocípede (1869), que também tem os pedais presos à roda dianteira.

Aprender a pedalar e manter-se em equilíbrio na vertical sobre um monociclo exige muita persistência e dedicação. A estabilidade é conseguida às custas de movimentos realizados por todas as partes do corpo. É possível resumir o equilíbrio ou estabilidade nas direções longitudinal e transversal ao plano xz e yz conforme indicamos na Fig. 2.



Figura 1 - Componentes de um monociclo.

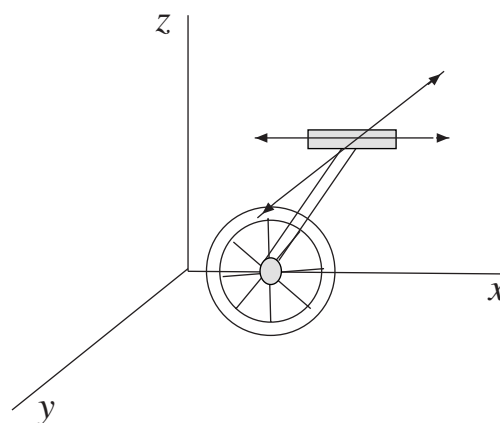


Figura 2 - Visualização em 3-D do movimento realizado pelo monociclo.

Nesta figura admitimos que o monociclo se desloca na direção x , de forma que no plano xz teremos o que denominamos de *equilíbrio longitudinal*, cuja definição explicitamos abaixo. No plano yz podemos definir de forma análoga o *equilíbrio transversal*. O equilíbrio longitudinal é obtido principalmente pela variação do torque nos pedais. Para isso, utiliza-se alternadamente os pés e pernas. Para manter-se na vertical, plano xz da roda, usa-se também o dorso do corpo e braços, com movimentos para frente e para trás na direção da queda. Neste trabalho o nosso foco estará centrado nas condições necessárias para manter o equilíbrio longitudinal do monociclista. No equilíbrio transversal a estabilidade transversal, plano yz na Fig. 2, é obtida principalmente com movimentos de giro do dorso do corpo e movimentos rápidos dos braços. O objetivo é girar o plano da roda no sentido da queda longitudinal e, assim, transferir a queda lateral em queda longitudinal.

3. O equilíbrio longitudinal

Conforme foi discutido na seção introdutória, o nosso objetivo neste trabalho é o de apresentar ao leitor uma descrição bastante simples, porém rica, das condições necessárias para se manter o equilíbrio dinâmico longitudinal atribuído ao monociclista. Para tanto vamos considerar um modelo baseado no movimento realizado por um pêndulo invertido. Este tipo de análise já existe na literatura [3], entretanto, a abordagem que foi considerada pelo autor envolve um maquinário matemático mais sofisticado, e que fugiria dos propósitos deste trabalho. Na Fig. 3, representamos o monociclo e efetuamos a comparação do movimento realizado por este com o movimento do pêndulo invertido.

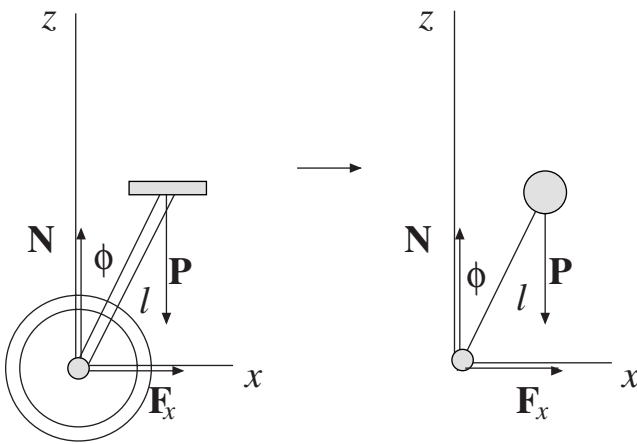


Figura 3 - Representação de um monociclo e um pêndulo invertido.

Na Fig. 3, também estão representadas todas as forças que atuam no sistema, o peso do monociclista \mathbf{P} , a reação normal \mathbf{N} , e a força que é criada pelo monociclista ao pedalar \mathbf{F}_x . Esta força é responsável pelo equilíbrio dinâmico do sistema em conjunto com os movimentos corporais realizados pelo monociclista, e ao mesmo tempo é também a responsável pelo movimento do monociclo que é então impulsionado na direção x . O sistema é assumido ser ideal, ou seja, não estamos considerando a massa do monociclo e as forças de atrito.

Um estudo criterioso a respeito das condições de equilíbrio do monociclo dependeria portanto da forma que é assumida para a força restauradora F_x , tal análise foi feita na Ref. [3]. Todavia, é possível realizar um estudo bastante interessante a respeito das condições de equilíbrio do monociclo examinando a função energia potencial atribuída ao pêndulo invertido conforme representado na Fig. 3

$$V(\phi) = mgl \cos \phi + V_{F_x}, \quad (4)$$

sendo a contribuição ao potencial V_{F_x} devido à força restauradora que atua na base do pêndulo invertido, e que portanto deverá ser harmônica. Para simular a

atuação da força restauradora iremos supor que esta possa ser representada por $F_x = -kx = -kl \sin \phi$, que resultará da ação de uma mola acoplada à extremidade livre do pêndulo invertido.

4. Análise da função energia potencial

Para um sistema mecânico conservativo podemos definir uma função denominada energia mecânica total, E , que consiste da soma de duas parcelas, a energia cinética denotada por T , e a energia potencial V .

$$E = T + V = \text{const.} \quad (5)$$

As condições de estabilidade do sistema podem ser inferidas ao analisarmos o comportamento da função energia potencial do sistema nos pontos extremos, conhecidos como *máximo* e *mínimo* de V . Dizemos que o equilíbrio será *estável* se o sistema estiver num ponto de mínimo e o equilíbrio será *instável* se o sistema se encontrar num ponto de máximo. Nesta seção mostraremos que a condição de equilíbrio dinâmico será atingida pelo monociclista se este executar as pedaladas e balanços de seu corpo numa certa frequência característica, responsável por levar o sistema para uma posição de equilíbrio, ou seja a um ponto de mínimo do potencial V .

Para tanto, vamos considerar uma variação do modelo descrito na Ref. [3], sendo que em nosso caso o papel da força restauradora será desempenhado por uma mola acoplada à extremidade livre do pêndulo invertido (Fig. 4).

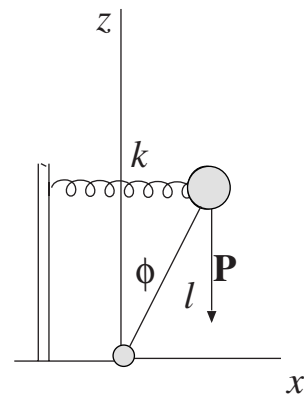


Figura 4 - Pêndulo invertido com força restauradora.

A força $F_x = -kx$ fará com que o pêndulo invertido efetue oscilações em torno da posição vertical (z), que representa a posição de equilíbrio. A frequência de oscilação da mola irá simular a frequência de pedaladas e balanços que o monociclista executa para se manter em torno da posição de equilíbrio. Então, para determinar quais são os vínculos impostos sobre a frequência necessária para a manutenção da posição de equilíbrio, vamos considerar a função energia potencial V para o sistema descrito na Fig. 4

$$V(\phi, k) = mgl \cos \phi + \frac{1}{2}kl^2(\sin\phi)^2. \quad (6)$$

Supondo que o pêndulo invertido execute pequenas oscilações, ou seja considerando $\phi \approx 0$, podemos escrever com o auxílio da expansão em série de Taylor, Eq. (2), as seguintes aproximações

$$\begin{aligned} \sin\phi &\approx \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \dots \\ \cos\phi &\approx 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

que levam a

$$V(\phi, k) \cong mgl + \frac{\phi^2}{2}l^2(k - \frac{mg}{l}). \quad (8)$$

Sem perda de generalidade podemos ainda considerar uma redefinição da função energia potencial do pêndulo, ou seja tomar $V(\phi, k) \rightarrow V'(\phi, k) + mgl$. Esta é uma escolha conveniente para a análise do problema que estamos tratando, e leva a uma expressão para a energia potencial que permite uma análise mais simples. Com base nesta escolha, a Eq. (8) agora pode ser reescrita na forma

$$V'(\phi, k) \cong \frac{\phi^2}{2}l^2(k - \frac{mg}{l}). \quad (9)$$

Finalmente se identificarmos a frequência angular da mola com $\omega = \sqrt{k/m}$ e a frequência angular do pêndulo com $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, teremos

$$V'(\phi, \omega) \cong \frac{\phi^2}{2}l^2m(\omega^2 - \omega_0^2). \quad (10)$$

Obviamente a condição de equilíbrio do monociclista, pêndulo invertido em nosso modelo, está vinculada ao regime de frequências da mola. A condição de mínimo, que leva um ponto de equilíbrio estável, e que consiste do fato de

$$\frac{d^2V'(\phi, \omega)}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_{min}} > 0, \quad (11)$$

leva a seguinte restrição sobre a frequência de oscilação da mola, ou da frequência das pedaladas e balanço do corpo do monociclista,

$$\omega^2 > \omega_0^2. \quad (12)$$

Esta condição implica que a força exercida pela mola, que representa em parte a força que é exercida sobre os pedais pelo monociclista, seja suficientemente grande a ponto de superar a queda do monociclista.

Na Fig. 5 apresentamos um gráfico da função $V'(\phi, \omega) = V$ em termos da frequência de oscilação da mola, ω , e do deslocamento angular do monociclista ϕ . Para efetuar o esboço deste gráfico, por questões apenas de conveniência, escolhemos um conjunto de valores em que $\omega_0 = 1$, ou seja $g/l = 1$. Uma escolha com valores realísticos para os parâmetros g , l , m apenas modificaria o fator de escala das quantidades que são plotadas neste gráfico.

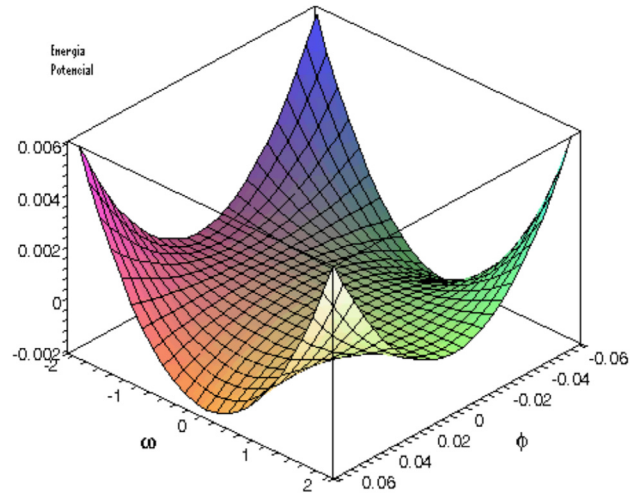


Figura 5 - Gráfico do potencial $V'(\phi, \omega)$.

Como é possível verificar ao analisar o gráfico, na ausência da força restauradora $\omega = 0$, o sistema se encontra na condição de equilíbrio instável. Para alguns valores da frequência de oscilação da mola (ou dos movimentos do monociclista) obtemos algumas regiões próximas ao ponto de instabilidade. Apenas para um certo regime de frequências de oscilação, ou melhor de movimentos adequados do monociclista é que o regime de estabilidade, ou mínimo do potencial é alcançado. Devido à simetria do potencial, pela troca $\omega = -\omega$ e $\omega_0 = -\omega_0$, esboçamos o gráfico para $V'(\phi, \omega)$ considerando valores tanto positivos quanto negativos para a frequência angular.

5. Conclusões

A análise do movimento realizado por um monociclo possui um grande potencial didático para se discutir muitos tópicos de interesse em física, em particular os associados a movimentos periódicos. Como argumentamos, este material pode ser utilizado como uma ferramenta adicional para o enriquecimento das aulas de física dos professores do ensino médio. A descrição exata do movimento que é realizado por um monociclo é bastante complexa. Entretanto, é possível desenvolver um estudo bastante interessante a respeito das condições de estabilidade do monociclista considerando um modelo relativamente simples. Neste trabalho, apresentamos uma variação do modelo considerado na Ref. [3], e que engloba estas características.

No modelo proposto, a força de restauração necessária para manter o monociclista em equilíbrio é simulada por uma mola acoplada a extremidade livre de um pêndulo invertido (Fig. 4). Nesta situação o espectro de frequências da mola representaria a frequência das pedaladas e movimentos do corpo do monociclista necessários para se manter uma situação dinâmica de equilíbrio. Considerando a Fig. 5, é possível identificarmos três regiões de interesse. A região onde $\omega \approx 0$,

que corresponde a uma condição de equilíbrio instável, pode ser associada a um monociclista iniciante, pois, se este não domina as técnicas de equilíbrio, portanto não conseguirá efetuar os movimentos na frequência necessária para atingir uma condição de estabilidade. Já a região onde $|\omega| \approx 1$, pode ser associada a um equilibrista com um pouco mais de experiência e que conseguiria, pelo menos por algum tempo, sustentar uma posição de equilíbrio. A situação onde temos $|\omega| \approx 2$ caracteriza um equilibrista experiente, uma vez que este é capaz de executar os movimentos na frequência adequada, e que leva a uma situação de estabilidade, ou

seja, o mínimo do potencial.

Referências

- [1] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics* (Ed. Addison Wesley, Nova Iorque, 2002), 3rd ed.
- [2] Sang-Yoon Kim and Bambi Hu, *Phys. Rev. E* **58**, 7231 (1999).
- [3] R.C. Johnson, *Am. J. Phys.* **66**, 589 (1998).
- [4] Zaiquan Sheng and Kazuo Yamafuji, *JSME International Journal C* **38**, 249 (1995).