

# Osciladores forçados: harmônico e paramétrico

(*Damping forced oscillator: harmonic and parametric*)

Vicente Pereira de Barros<sup>1</sup>

*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil*

Recebido em 19/6/2007; Aceito em 13/8/2007

O objetivo deste trabalho é mostrar como uma análise comparativa das várias técnicas de resolução de equações diferenciais pode ser uma importante ferramenta didática no aprendizado de ressonância em mecânica. São estudados os osciladores harmônico e paramétrico forçados pelo método da variação dos parâmetros e pelo método de Green. A importância de suposições a priori na resolução de equações diferenciais também é discutida.

**Palavras-chave:** oscilações mecânicas, ressonância, métodos matemáticos aplicados à física.

The goal of this work is show how the comparative study of several techniques to solve differential equations can be a important teaching tool in the learning of a mechanical resonance phenomenon. The forced damped harmonic and parametric oscillator are studied by method of variation of parameters and Green's method. The importance of a priori suppositions is also discussed.

**Keywords:** mechanical oscillations, resonance, applied mathematical methods in physics.

## 1. Introdução

O estudo de oscilações em mecânica é muito importante tanto para a formação matemática do estudante quanto para resolução de problemas do dia-a-dia nas mais diversas áreas.

Um tópico muito interessante em oscilações é o fenômeno da ressonância que é um comportamento diferente do oscilador quando é aplicada uma frequência específica. Nos cursos de mecânica da graduação é comum o estudo de osciladores harmônicos, forçados, amortecidos e até mesmo acoplados. Com menor frequência são estudadas as oscilações paramétricas e suas aplicações, nos cursos de pós-graduação, por exemplo, é utilizada como exemplo para uma visão geral de caos [1].

O estudo do oscilador harmônico apresenta uma ampla faixa de aplicações pedagógicas, um oscilador harmônico em um trilho de correr pode apresentar diversos limites da fenomenologia das oscilações [3]. O oscilador harmônico forçado estudado à luz do teorema trabalho-energia pode prover um excelente trabalho de aprendizado com ferramentas computacionais [4].

O clássico oscilador harmônico que oscila em uma frequência característica ao ser perturbado por uma força oscilante com a mesma frequência característica do oscilador apresentará oscilações onde a amplitude

das oscilações aumentarão linearmente com o tempo [2], quando se tem esta situação o oscilador está em ressonância. Este fenômeno é muito útil, um exemplo é a quebra da ponte sobre o estreito de Tacoma, um caso de ressonância.

O estudo das oscilações também é uma interessante aplicação de métodos matemáticos na física. O oscilador harmônico amortecido ou forçado solucionado pelo método de Green apresenta um interessante exemplo físico do uso deste método [5].

As oscilações paramétricas surgem em um sistema onde um dos parâmetros do oscilador varia com uma determinada coordenada. Em circuitos ocorre oscilações paramétricas quando um dos parâmetros do sistema, a capacitância, varia com o tempo periodicamente [6]. Em física de partículas os campos são descritos por equações diferenciais nas quais a ressonância paramétrica funciona como um mecanismo de produção de matéria [7]. Em sólitons formados em condensados de Bose-Einstein ocorre ressonância paramétrica na distância relativa entre dois sólitons para a oscilações no potencial de armadilhamento do condensado [8].

O teorema de Floquet que é um importante resultado teórico no estudo das oscilações paramétricas e pode ser usado de maneira didática com demonstrações simples como um pêndulo paramétrico [9].

Os métodos de resolução de equações diferenciais

<sup>1</sup>E-mail: vpbarros@if.usp.br.

aplicados ao estudo de ressonâncias são muito variados. Nos cursos de mecânica da graduação muitas vezes os métodos de resolução são apresentados sem uma comparação entre suas vantagens e limitações. Diante desta falha muitas vezes o aluno não sabe até que ponto seu conhecimento é aplicável na resolução de problemas práticos e qual técnica utilizar em sua pesquisa científica por exemplo.

Desta forma muitas vezes os métodos são “decorados” para a prova resultando em um conhecimento com fim no próprio ambiente escolar [10].

Neste trabalho o oscilador harmônico sob a ação de uma força periódica é tratado pelos métodos da variação dos parâmetros e Green, as vantagens e limitações de cada método são discutidas, posteriormente de forma semelhante o oscilador paramétrico forçado é resolvido. A discussão sobre o uso de suposições em física também é levantada.

## 2. O oscilador harmônico

Qualquer sistema sob a ação de uma força restauradora pode ser descrito como um oscilador harmônico. Imagine um corpo ligado à uma mola de constante  $k$  como ilustra a Fig. 1. A equação de movimento pode ser escrita por

$$m\ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

onde  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , que é conhecida como frequência natural do oscilador.

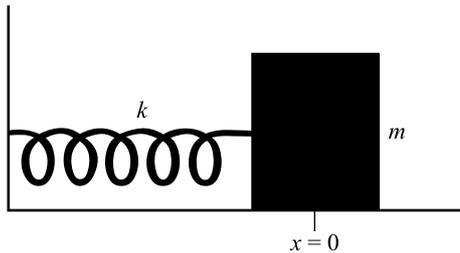


Figura 1 - Ilustração de um oscilador harmônico

Quando este corpo é submetido a uma força externa  $f(t)$  a Eq. (1) é modificada para

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t), \quad (2)$$

onde  $f(t) = F_0 \cos(\omega t)$

Este problema é muito importante pois descreve o comportamento de vários fenômenos da natureza do cristal que vibra em uma determinada frequência a ponte que balança com a marcha de um pelotão de soldados, todos são fenômenos de oscilações forçadas por forças externas. Naturalmente a escolha de uma força  $f(t)$  periódica está associada ao fato de ser mais fácil o tratamento do problema além de que muitos fenômenos na natureza são periódicos.

Pelo estudo de equações diferenciais sabe-se que a solução completa do problema é a soma das soluções

homogênea e particular  $x(t) = x_p + x_h$ , a solução homogênea é a solução da Eq. (1) e a solução particular é a solução da Eq. (2) [11].

Encontrar a solução da equação homogênea é a parte mais simples, o problema consiste em se encontrar a solução da particular. Uma forma mais comum usada para explicar este problema [12] é supor que a solução particular  $x_p(t)$  seja oscilante como a força, no entanto, não se sabe a sua amplitude, em função disto um parâmetro é usado para ajustar a solução.

Assim, supondo  $x_p(t) = C \cos(\omega t)$  onde  $C$  é o parâmetro a ser ajustado, substituindo na Eq. (2), será encontrado

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(\omega^2_0 - \omega^2)} \cos(\omega t), \quad (3)$$

Usando as condições iniciais de que o corpo está em repouso ( $\dot{x}(0) = 0$ ) no momento em que se inicia a ação da força e que a posição inicial do corpo é conhecida ( $x_0$ ) tem-se a seguinte expressão para a solução completa

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{(\omega^2_0 - \omega^2)} \left[ \cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t) \right], \quad (4)$$

Para o caso particular em que a frequência de oscilação da força é igual a frequência natural do oscilador ( $\omega = \omega_0$ ), ocorre a ressonância, para resolver a singularidade que se forma no denominador do segundo termo da Eq. (4), pode-se denominar a quantidade  $\Delta\omega = (\omega - \omega_0)$  resultando em

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{F_0}{\Delta\omega(\omega_0 + \omega)} \left[ \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t] - \cos(\omega_0 t) \right], \quad (5)$$

usando a definição de derivada o segundo termo é associado a derivado com relação à  $\omega_0$  e obtém-se

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t), \quad (6)$$

Ou seja, a amplitude das oscilações aumenta linearmente na situação que o sistema é forçado por uma frequência ressonante.

Pode-se ter uma visão um pouco mais crítica deste método, muitas vezes os alunos questionam a suposição de que a solução deve variar com a mesma frequência que a força, no entanto, se o professor não dispõe de um laboratório para mostrar-lhes que experimentalmente verifica-se este comportamento os alunos ficam sem alternativas para compreender a pertinência desta suposição. No entanto, como estratégia pode-se utilizar outra método de resolução.

O método da variação das constantes é um método muito utilizado para resolução de sistemas de equações diferenciais lineares de segunda ordem [13]. O método

consiste em supor que a solução particular da equações é composta por constantes que variam lentamente no tempo e são dadas por

$$x_p = a(t)x_1 + b(t)x_2,$$

onde  $x_1$  e  $x_2$  são componentes da solução homogênea.

Pode-se escrever a equação diferencial como

$$Lx = g(t), \tag{7}$$

onde  $L$  é um operador linear e  $g(t)$  uma função qualquer dependente do tempo

Para encontrarmos as constantes  $a(t)$  e  $b(t)$  necessitamos resolver sistema de equações

$$\begin{aligned} a'x_1 + b'x_2 &= 0, \\ a'x'_1 + b'x'_2 &= g(t), \end{aligned} \tag{8}$$

é conhecido que  $x_1 = \cos(\omega_0 t)$  e  $x_2 = \sin(\omega_0 t)$ ,  $a'$  e  $b'$  denotam as derivadas temporais de  $a$  e  $b$  respectivamente.

Resolvendo o sistema encontra-se  $a'$  e  $b'$  e integrando-os obtém-se

$$a = \frac{F_0}{2\omega_0} \left[ \frac{\cos[(\omega_0 + \omega)t]}{(\omega_0 + \omega)} + \frac{\cos[(\omega_0 - \omega)t]}{(\omega_0 - \omega)} \right], \tag{9}$$

$$b = \frac{F_0}{2\omega_0} \left[ \frac{\sin[(\omega_0 + \omega)t]}{(\omega_0 + \omega)} + \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)t]}{(\omega_0 - \omega)} \right]. \tag{10}$$

Finalmente a solução particular é encontrada

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{F_0}{2\omega_0} \left[ \frac{\cos[(\omega_0 + \omega)t]}{(\omega_0 + \omega)} \cos(\omega_0 t) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\cos[(\omega_0 - \omega)t]}{(\omega_0 - \omega)} \cos(\omega_0 t) + \frac{\sin[(\omega_0 + \omega)t]}{(\omega_0 + \omega)} \sin(\omega_0 t) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)t]}{(\omega_0 - \omega)} \sin(\omega_0 t) \right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Com algumas manipulações fundamentais de trigonometria encontraremos a mesma expressão para a solução particular apresentada na expressão (3). Este método apresenta a vantagem de que escolha da solução não necessita que o aluno pressuponha uma solução, que inicialmente durante o processo de aprendizagem é desconfortável. No entanto, o processo é mais trabalhoso e deve ser alertado que as dificuldades do método será tanto maior quanto mais difícil de ser integrada a função  $g(t)$ .

Na verdade continua-se usando o conhecimento das equações homogêneas. Nesta mesma linha, outro método interessante na resolução deste problema é o método de Green que consiste na solução da equação diferencial por meio das funções de Green [5, 14]. O método operacional é obtido a partir da equação diferencial linear

$$Lx(t) = S(x, t), \tag{12}$$

onde  $S$  é uma função dada que é denominada de fonte e  $x(t)$  é a função procurada, note que  $S$  pode depender ou não da própria variável  $x$ . Denomina-se função de Green do operador linear  $L$ , a função  $G(t - t')$  tal que

$$LG(t - t') = \delta(t - t').$$

Neste problema tem-se  $G(t - t') = (1/\omega_0)\text{sen}[\omega_0(t - t)]$  e  $S(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$ . Fazendo a primeira integração da função de Green encontra-se

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \cos(\omega_0 t) + \\ &\quad \frac{F_0}{\omega_0} \int_0^t \sin[\omega_0(t - t')] \cos(\omega t') dt', \end{aligned} \tag{13}$$

que resulta na expressão (4) como esperado. Note que neste problema temos a dificuldade das integrais que mais uma vez dependem da forma da fonte. Novamente descobrir a forma da função de Green é necessário entender e resolver a equação homogênea.

### 3. O oscilador paramétrico

No caso em que um parâmetro do oscilador varia temporalmente ocorre o fenômeno de oscilação paramétrica, em mecânica casos clássicos de osciladores paramétricos são os pêndulos com comprimento variável e com ponto de suspensão oscilante.

A equação de movimento nestes sistemas é a equação de Mathieu, dada por

$$\ddot{x} + \omega^2_0 [1 + \eta \cos(\omega t)]x = 0, \tag{14}$$

onde  $\eta \ll 1$ .

Landau [15] resolve o problema para pequenas oscilações supondo que a solução é uma combinação das soluções de um oscilador harmônico simples com coeficientes dependentes, resultando em  $x = a(t) \cos[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] + b(t) \sin[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t]$ , onde  $\varepsilon$  é um desvio da frequência natural do oscilador. Substituindo esta expressão na Eq. (14), supondo que os coeficientes variam lentamente, tal que,  $\ddot{a} \approx \varepsilon a$  e  $\ddot{b} \approx \varepsilon b$  e sempre  $\varepsilon \ll 1$ . Obtemos

$$\begin{aligned} &\left[ \varepsilon \dot{b} - 2 \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \dot{a} - (\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})^2 b \right] \sin[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] + \\ &b \omega^2_0 [1 + \eta \cos(\omega t)] \sin[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] + \\ &\left[ \varepsilon \dot{a} - 2 \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \dot{b} - (\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})^2 a \right] \cos[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] + \\ &a \omega^2_0 [1 + \eta \cos(\omega t)] \cos[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Neste instante é suposto que a frequência da perturbação  $\omega$  é o dobro da frequência fundamental do oscilador  $\omega_0$ , usando algumas relações trigonométricas

e desprezando termos da ordem de  $3(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})$  e após um certo trabalho de manipulação encontra-se

$$\begin{aligned} & - \left[ 2\dot{a} + \varepsilon b + \frac{\eta\omega_0}{2} b \right] \omega_0 \sin[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] + \\ & \left[ 2\dot{b} - \varepsilon a + \frac{\eta\omega_0}{2} a \right] \omega_0 \cos[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Os termos que multiplicam os senos e cossenos devem se anular resultando nas seguintes equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{a} + \frac{1}{2} \left( \varepsilon + \frac{\eta\omega_0}{2} \right) b &= 0, \\ \dot{b} + \frac{1}{2} \left( \frac{\eta\omega_0}{2} - \varepsilon \right) a &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

É relativamente simples determinar as expressões para os coeficientes, que são do tipo  $a(t) = a_0 e^{\sigma t}$  e  $b(t) = b_0 e^{\sigma t}$  e determina-se  $\sigma$  tal que

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\eta\omega_0}{2} \right)^2 - \varepsilon^2 \right]. \quad (18)$$

A condição de ressonância paramétrica é que  $\sigma$  seja real ( $\sigma^2$  maior do que zero). Assim, a ressonância paramétrica ocorre no intervalo

$$-\frac{\eta\omega_0}{2} < \varepsilon < \frac{\eta\omega_0}{2}$$

em torno da frequência  $2\omega_0$ . Esta é a região de estabilidade da solução, isto quer dizer para quais valores de frequência de oscilações de  $(\omega)$  esta solução ainda é válida.

Se a Eq. (14) é chamada de uma equação homogênea a sua solução será

$$x_h(t) = e^{\sigma t} \left[ a_0 \cos[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] + b_0 \sin[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] \right], \quad (19)$$

onde  $a_0$  e  $b_0$  sendo constantes.

Reenfatizo que esta é uma aproximação para pequenas oscilações, podendo ser extrapolada para valores maiores de oscilações usando cálculo numérico [6].

Na verdade a escolha de  $\omega = 2\omega_0 + \varepsilon$  foi feita pois nesta condição o aumento da amplitude é mais evidente. Arnold [16] mostra que esta região pode ser determinada por um tratamento matricial da soluções homogêneas. O teorema de Floquet leva em conta qualquer perturbação temporal da frequência do oscilador, que vai além da equação de Mathieu, o tratamento matricial torna mais simples o estudo das regiões de estabilidade das equações [9].

Pode-se tomar agora o caso de um oscilador paramétrico forçado, dado por

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + \eta \cos(\omega t)] x = F_0 \cos(\omega_f t). \quad (20)$$

Primeiramente trata-se o caso em que ocorre a máxima amplitude e a força que perturba o oscilador tem a mesma frequência de oscilação do parâmetro ( $\omega = 2\omega_0 = \omega_f$ ). Para encontrar a solução particular pode-se empregar o método das variação dos parâmetros usando as soluções da equação homogênea (19) e obter

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2\omega_0} \left[ \frac{3\omega_0 \cos(2\omega_0 t) + \sigma \sin(2\omega_0 t)}{(9\omega_0^2 + \sigma^2)} - \frac{\omega_0 \cos(2\omega_0 t) + \sigma \sin(2\omega_0 t)}{(\omega_0^2 + \sigma^2)} \right]. \quad (21)$$

Note que a solução particular não possui uma taxa de crescimento exponencial. Usando a condição inicial de  $x(t=0) = x_0, dx/dt(t=0) = 0$ , as constantes  $a_0$  e  $b_0$  são dadas por

$$a_0 = x_0 - \frac{F_0}{2} \left[ \frac{3}{(9\omega_0^2 + \sigma^2)} - \frac{1}{(\omega_0^2 + \sigma^2)} \right], \quad (22)$$

$$b_0 = -\frac{\sigma}{\omega_0} \left\{ x_0 - \frac{F_0}{2} \left[ \frac{1}{(9\omega_0^2 + \sigma^2)} + \frac{1}{(\omega_0^2 + \sigma^2)} \right] \right\}. \quad (23)$$

Para se ter uma comparação desta solução, foram realizados cálculos numéricos usando Runge-Kutta de quarta ordem [14] e são apresentados na Fig. 2 os resultados das soluções analíticas e numéricas para a situação homogênea e a forçada.

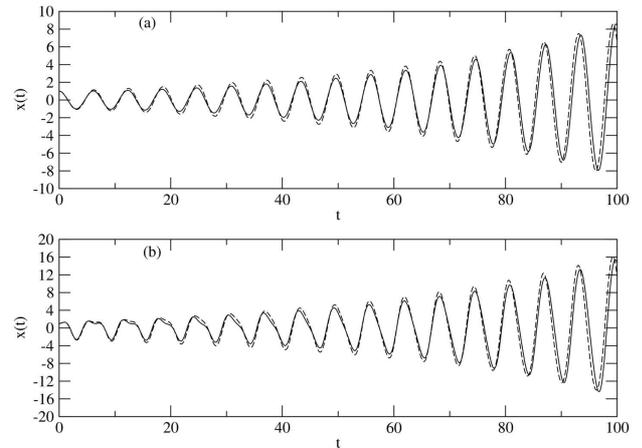


Figura 2 - Gráfico das soluções para a ressonância paramétrica. (a) homogêneas, cálculo numérico linha contínua, Eq. (19) com  $\varepsilon = 0.025$  linha tracejada. (b) Sistema forçado com uma força de intensidade  $F_0 = 2.5$ , cálculo numérico linha contínua, Eqs. (21) e (23) com  $\varepsilon = 0.025$  linha tracejada.

Pode-se perceber pela Fig. 2 que o oscilador ao ser forçado, a princípio apresenta uma competição entre o termo oscilatório particular que é estacionário e o termo exponencial da solução harmônica, que é caracterizado pelos dois modos nos tempos iniciais das oscilações. Posteriormente a parte homogênea acaba por dominar o comportamento da solução. Ocorre um bom acordo entre a solução analítica e o cálculo numérico.

Para o caso em que o parâmetro oscilante oscila com uma frequência igual a frequência fundamental

( $\omega = \omega_0$ ), poderia-se usar uma solução parecida com a Eq. (19) com uma taxa de crescimento  $\sigma$  menor [15], pois sabe-se que ocorrerá ressonância para todas as frequências múltiplas de  $2\omega_0/n$ , com  $n = 1, 2, \dots$

É possível o uso do mesmo procedimento utilizado anteriormente, o método da variação dos parâmetros para resolver o caso em que  $\omega = \omega_0$ , mas como ilustração neste trabalho será utilizado outro método, o método de Green, que neste problema possui uma fonte com termos de  $t$  e  $x$ ,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = (F_0 - \eta\omega_0 x) \cos(\omega_0 t). \quad (24)$$

Na primeira integração da função de Green, tomamos a solução homogênea e resolvemos a integral da Eq. (13) que tem o seguinte formato

$$x_2(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{\omega_0} \int_0^t \sin[\omega_0(t-t')] (F_0 - x_1) \cos(\omega_0 t') dt', \quad (25)$$

com  $x_1 = \cos(\omega_0 t')$ . Após a integração encontramos

$$\begin{aligned} x_2(t) = & x_0 \left\{ \cos(\omega_0 t) + \eta \left[ \frac{1}{3} \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{6} \cos(2\omega_0 t) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \right] + \eta^2 \left[ -\frac{1}{6} + \frac{87}{864} \cos(\omega_0 t) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{18} \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{96} \cos(3\omega_0 t) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{5}{24} \omega_0 t \sin(\omega_0 t) \right] \right\} \\ & + F_0 \left\{ \frac{\eta}{9\omega_0^2} \left[ \cos(2\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\eta}{12\omega_0} t \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t) \right\}. \quad (26) \end{aligned}$$

Na expressão (26) percebe-se que para o caso  $\eta = F_0 = 0$  tem-se a solução homogênea do oscilador harmônico simples. E para o caso de  $\eta = 0$  e  $F_0 \neq 0$  tem-se o caso do oscilador harmônico forçado, note que já é obtida a expressão (6).

Na Fig. 3 é apresentada a comparação desta solução analítica com a solução numérica e nota-se um bom acordo entre ambas. O que é evidente de imediato é que a contribuição do termo paramétrico é muito pequena sendo mais evidente a contribuição do termo forçador.

Para o caso mais simples das ressonâncias paramétricas há ainda o problema de construir a solução a partir de várias suposições do comportamento da solução, podemos utilizar técnicas de equações diferenciais para tentar elucidar a validade destas suposições, no entanto, o trabalho advindo deste uso pode não ser muito eficiente para fins didáticos, sendo interessante o uso de experiências e do cálculo numérico.

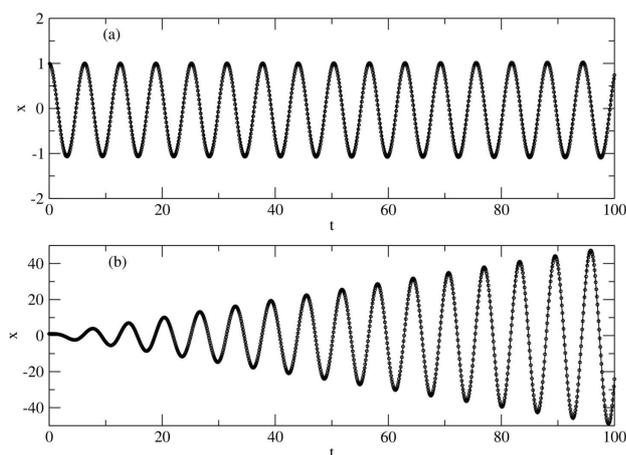


Figura 3 - Gráfico das soluções para a ressonância  $\omega = \omega_0$ . (a) Caso sem termo forçador  $F_0 = 0$  na Eq. (24), cálculo numérico linha contínua, solução analítica pontilhado. (b) Sistema forçado com uma força de intensidade  $F_0 = 1$ , cálculo numérico linha contínua, solução analítica pontilhado. Em ambos gráficos  $\eta = 0.1$ .

Não existem ferramentas definitivas que possam sanar totalmente o desconforto gerado no aluno pelo fato das soluções serem baseadas em suposições sobre o problema. O aluno muitas vezes se sente impotente não sabendo qual suposição seja a “certa”. A apresentação das limitações dos métodos de resolução de equações diferenciais e a sua comparação com soluções que levam em conta suposições, que aparentemente são imposições, mostram de certo modo a limitação do método científico. A máxima muitas vezes usadas por professores que “esta é uma boa suposição, porque funciona” é a melhor resposta. A própria concepção do método científico apresenta controvérsias. Todo o conhecimento científico é totalmente isento de uma estrutura de pensamento que depende de informações sobre o objeto do conhecimento, ou as informações (e as crenças) que temos sobre o objeto permite-nos construir o método [17, 18]? Questões como estas estão fora do escopo deste artigo.

#### 4. Conclusões

Foram estudados os osciladores harmônicos e paramétricos forçados por uma força periódica através de três técnicas de resolução de equações diferenciais. Percebemos que o uso de suposições sobre o comportamento da solução a priori são muito úteis tanto para o caso do oscilador harmônico forçado quando para o oscilador paramétrico, no entanto podem surgir críticas sobre a imparcialidade destas suposições por parte do aluno que primeiramente vê este tipo de resolução.

O método da variação dos parâmetros é um método interessante para solução deste tipo de problemas, este método possui a vantagem de não levantar nenhuma suposição sobre o comportamento físico dos osciladores tratados, porém resolução de problemas de osciladores

no caso da ressonância torna-se tão difícil quanto mais complexa é a forma da força que atua sobre o oscilador. O uso de problemas de oscilações no caso em que há ressonância como sequência didática pode ser interessante como exercício na aprendizagem deste método matemático.

O método de Green mostrou-se muito útil para resolução do oscilador paramétrico a exemplo do que havia sido apresentado no oscilador harmônico forçado [5]. O método de Green possui uma formulação mais geral e poderoso do que o método da variação dos parâmetros [13, 14], no entanto, mais sofisticada do que o método da variação dos parâmetros, o que demanda mais tempo por parte do aluno em compreender as particularidades do método. Como o método de Green tem suas inúmeras aplicações em eletromagnetismo e mecânica, sua apresentação torna mais “inteligível” as soluções encontradas do que as suposições *ad hoc* que podemos fazer no caso dos osciladores harmônicos e paramétricos.

Creio que esta pode ser uma sequência muito proveitosa tanto na aprendizagem de conceitos importantes em mecânica quanto em técnicas de resolução de equações diferenciais.

## 5. Agradecimentos

Agradeço ao prof. Arnaldo Gammal pelas discussões. Este trabalho teve o suporte parcial da CAPES.

## Referências

- [1] Walter F. Wreszinski, *Mecânica Clássica Moderna* (São Paulo, Edusp, 1996).
- [2] H.M. Nussenzveig, *Física Básica* (São Paulo, Edgar Blücher, 1997), v. I.
- [3] R.D. Peters and T. Pritchett, *Am. J. Phys.* **65**, 1067 (1997).
- [4] A. Marchewka, D.S. Abbott and R.J. Beichner, *Am. J. Phys.* **72**, 4, (2003).
- [5] A.C. Bertuola, M.S. Hussein e M.P. Pato, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **27**, 327 (2005).
- [6] C.C. Rulli e J.P. Rino, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **29**, 71 (2007).
- [7] V. Zanchin, A. Maia, W. Craig and R. Brandenberger *Phys. Rev. D* **57**, 4651 (1998).
- [8] V.P. Barros, M. Brtka, A. Gammal and F.Kh Abdullaev, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **38**, 4111 (2005).
- [9] N. Fameli, F.L. Cruzson and S. Mikoshiba, *Am. J. Phys.* **67**, 127 (1999).
- [10] M. Pietrocola (org.), *Ensino de Física: Conteúdo e Metodologia numa Concepção Integradora* (Florianópolis, UFSC, 2005).
- [11] H.L. Quidorizzi, *Um Curso de Cálculo* (LTC, Rio de Janeiro, 2000).
- [12] R. Feynmann, R.B. Leighton and M. Sands *Feynmann Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, 1963), v. 1.
- [13] W.E. Boyce e R.C. DiPrima, *Equações Diferenciais e Problemas de Valores de Contorno* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1979).
- [14] F.W. Byron and R.W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics* (Addison Wesley, Reading, 1979), v. 1 & 2.
- [15] L.D. Landau, *Mecânica* (Mir, Moscou, 1978).
- [16] V.I. Arnold, *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica* (Mir, Moscou, 1987).
- [17] I. Lakatos, *The Methodology of Scientific Research Programs* (Cambridge University Press, Cambridge, 1978).
- [18] E.A. Oliveira e V.P. Barros, *Cien. & Cogn.* **11**, 184 (2007), disponível em [www.cienciasecognicao.org](http://www.cienciasecognicao.org).