

Cartas ao Editor

A equação de transporte de Boltzmann e sua importância para a física dos reatores nucleares

De parabéns está a SBF, ao editar na Revista Brasileira do Ensino de Física, uma edição em tributo a um dos pilares da Física, Ludwig Boltzmann, por ocasião do centenário de sua morte. Porém a contribuição de Boltzmann vai além da fundação da mecânica estatística, sendo que a sua famosa equação descrevendo a distribuição esperada de partículas, no espaço de fases, $n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, *i.e.*

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} n = \left(\frac{dn}{dt} \right)_{\text{colisões}},$$

com \mathbf{F} a força externa e o termo $(dn/dt)_{\text{colisões}}$ representando a variação total no número esperado de partículas devido a colisões é o modelo básico para a descrição de transporte de partículas, quer para os chamados processos de caminho aleatório (“random walk”, ou auto-difusão), ou de processos de transporte coletivo, conforme ilustrado na Fig. 1.

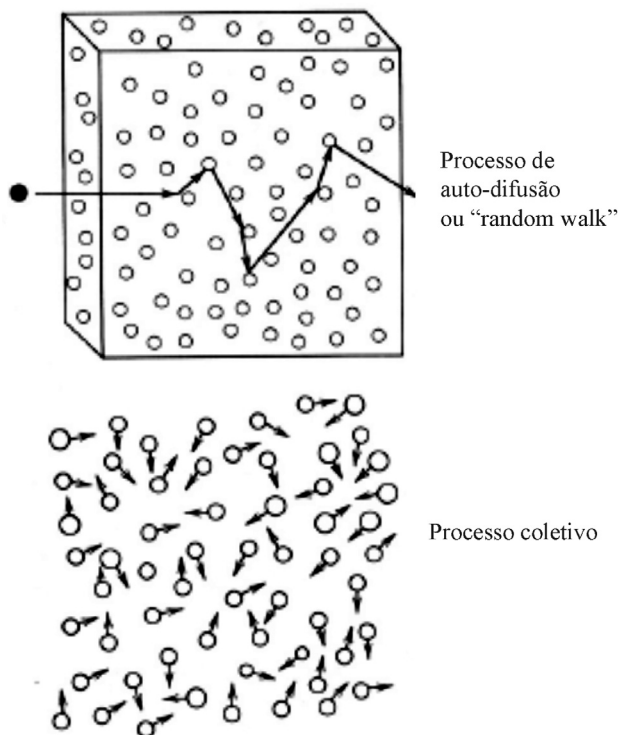


Figura 1 - Ilustração dos processos de transporte.

No caso de partículas sem carga (*e.g.* nêutrons e fótons), o processo de transporte é de auto-difusão, e com base nas hipóteses físicas, tais como a densidade das partículas muito menor do que a densidade das partículas do meio em que ocorre o transporte, a não interação entre partículas, e a ausência de forças externas, “heurísticamente” pode-se mostrar que

$$\left(\frac{dn}{dt} \right)_{\text{colisões}} = -v \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \int d^3v' v' \Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) n(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t),$$

E a equação de Boltzmann, reduz-se a uma equação de transporte linear, que no caso de nêutrons, o termo de transferência inclui a multiplicidade devido às colisões devido às fissões, ou seja

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E, t)}{\partial t} = -\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Phi - \Sigma_t \Phi + \int_{\Omega} d\boldsymbol{\Omega}' \int_0^{\infty} dE' \Sigma_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}', E' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}, E; t) \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}', E', t) + \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_{\Omega} d\boldsymbol{\Omega}' \int_0^{\infty} dE' v(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}', E', t) + S_{ext}.$$

onde na equação de Boltzmann linear para nêutrons, ao invés da densidade de partículas introduz-se a grandeza fluxo, $\Phi = nv$, pela possibilidade do cálculo das taxas de reação, $\Sigma \Phi$ e a secção de choque macroscópica, ou probabilidade de interação por unidade de caminho, como $\Sigma = N\sigma$, com N a densidade atômica do meio em que ocorre o transporte, e σ a secção de choque microscópica, que em termos microscópicos descreve a interação dos nêutrons com os núcleos do meio, com os subscritos s e f para as reações de espalhamento e fissão (assumida isotrópica), e a secção de choque de transferência por espalhamento, o produto da densidade atômica do meio pela secção de choque diferencial de espalhamento ($d\sigma/dEd\Omega$), e o espaço de fase é a posição, direção e energia. No termo de fissão, $\chi(E)$ é o espectro de energias dos nêutrons de fissão e $v(E)$ é o numero de nêutrons emitidos por fissões induzidas por nêutrons com energia E . Esta equação é a base para a descrição da população de nêutrons num sistema (*e.g.* reatores nucleares), e é a base para o projeto dos reatores nucleares, também conhecida como física dos reatores. O fato a se destacar é que esta equação pode ser

interpretada como um balanço de partículas no espaço de fases.

Outro fato a destacar é que de maneira análoga que a fluidodinâmica dos meios contínuos é uma consequência direta da mecânica estatística, a introdução da chamada Lei de Fick, que correlaciona a corrente de nêutrons com um gradiente de fluxo, *i.e.* $\mathbf{J} = -D\nabla\Phi$, reduz a equação de transporte a um “modelo do contínuo” para nêutrons, denominada teoria da difusão.

Desta forma, indiretamente, L. Boltzmann, é de certa forma o “pai” da física dos reatores nucleares, e mesmo na sua época sem o conhecimento das reações nucleares, e da mecânica quântica, será a sua equação a base para o projeto dos reatores nucleares atuais, e a nossa comunidade de física de reatores tem este brilhante cientista como o pilar de seu trabalho.

José Rubens Maiorino
E-mail: maiorino@ipen.br

Sobre os potenciais de condutores em movimento

Publicamos em 2001 artigo nesta Revista [1], intitulado ‘Esfera condutora em movimento: campo, potenciais e dúvidas’. As ‘dúvidas’ se referiam ao sentido físico do potencial escalar da esfera carregada em movimento e, principalmente, ao do potencial vetor que devemos atribuir à mesma. Com referência à Fig. 1, reproduzida daquele artigo, os principais pontos a recordar são os seguintes:

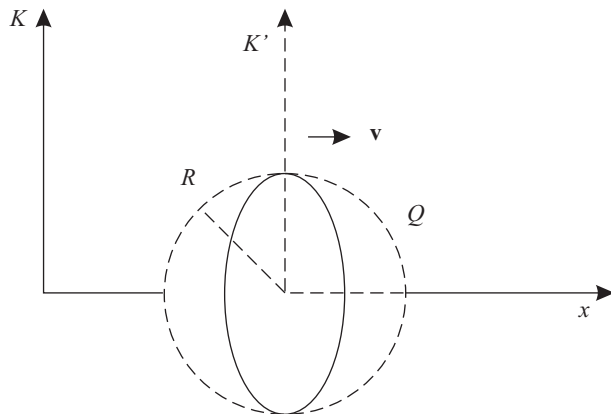


Figura 2 - Esfera no sistema K' , em tracejado, vista do sistema K , traço cheio.

1) Para um observador no sistema K , a ‘esfera’ é um elipsóide achatado na direção de movimento e de revolução nas outras duas.

2) O potencial escalar do condutor em movimento, Φ em K , é maior do que o mesmo em K' , Φ' , este igual a Q/R , pelo fator $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, ou seja $\Phi = \gamma\Phi'$. Os símbolos têm o sentido habitual, Q , carga, R , raio, v , velocidade da esfera e c , velocidade da luz.

3) Além do potencial escalar Φ , devemos atribuir à ‘esfera’ condutora em movimento um potencial vetor, com uma componente exclusivamente na direção de movimento $A_x = v\Phi/c$.

4) No sistema K , a normal ao condutor está na

direção do ‘campo’ de Lorentz local, $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$.

5) O aumento do potencial escalar em K deve ser atribuído ao fato de que nele os potenciais efetivos são os de Liénard-Wiechert, que, lembramos, não são simplesmente retardados pois incluem o fator de ‘paralaxe cinética’, $(1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}}/c)^{-1}$, sendo $\hat{\mathbf{r}}$ o vetor unitário de \mathbf{r} ao ponto considerado [2].

Gostaríamos de fazer aqui os seguintes esclarecimentos em relação ao trabalho anterior:

I) Os potenciais que o observador em K atribui são sistêmicos, isto é, ao condutor em movimento como um todo. Notemos que o potencial escalar Φ é maior que Φ' , este medido em K' , pelo fator γ , ou seja, na mesma proporção em que a massa relativística aumenta ao se passar de K' a K . Se adotamos o ponto de vista de que massa e energia são equivalentes, o aumento da energia potencial representa o aumento da ‘energia elétrica’ (ver ítem a seguir) do condutor em movimento.

II) Para nossa surpresa, se calcularmos as integrais dos quadrados dos campo elétrico e magnético no exterior do elipsóide, a grandeza obtida não parece guardar nenhuma relação direta com Φ [4]. Por esta razão, chamamos este, ou seu produto com Q , de ‘energia elétrica’, ligado ao conceito de potencial eletrostático ao qual os elétrons metálicos seriam sensíveis, imóveis ou móveis.

III) Tendo em conta o resultado mencionado no ítem 4) acima, concluímos que as transformações de Lorentz permitem encontrar a forma do condutor em movimento no qual a normal ao mesmo está na direção da força de Lorentz em cada ponto de sua superfície.

IV) A dúvida principal deixada no artigo se referia à interpretação a ser dada ao potencial vetor do condutor em movimento, igual a $v\Phi/c$ na direção de movimento. As considerações feitas no ítem I) sugerem que ele represente a quantidade de movimento associado à

energia elétrica, necessariamente unida à energia numa entidade única ‘energia-momento’, como um quadri-vetor da relatividade ou um multivetor 0-1 da álgebra geométrica, ou de Clifford.

V) Sabemos que se a esfera é supercondutora, seus pares bosônicos são sensíveis ao potencial vetor, de tal maneira que - na linguagem de Feynman [3] - o p -momento, igual à soma do mv -momento e ao produto da carga pelo potencial vetor (ou momento elétrico, na nossa), é conservado. Se imaginamos que ela, inicialmente parada, recebe impulsivamente a velocidade v no sistema K , temos que o p -momento, inicialmente nulo, assim permanece porque para cada elétron no interior do condutor, vale a relação $mv + qA_x = 0$ (pois q , carga do elétron, é negativa) de acordo com a argumentação

desenvolvida em IV.

G.F. Leal Ferreira
DFCM, IF - São Carlos,
E-mail: guilherm@if.sc.usp.br

Referências

- [1] G.F. Leal Ferreira, Rev. Bras. Ens. Fis. **23**, 141 (2001).
- [2] R.P. Feynman, R.B. Leighton e M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, v .2* (Addison Wesley, Reading, 1965).
- [3] V. 3 da Ref. [2].
- [4] Obtivemos para $(1/8\pi) \int_0^\pi 2\pi sen\theta d\theta \int_{r(\theta)}^\infty (E^2 + B^2)r^2 dr$ o resultado $Q^2(3 - v^2/c^2)/(6R\sqrt{1 - v^2/c^2})$.