

# Teorema de van der Pauw (van der Pauw theorem)

Renê Robert<sup>1</sup> e Sergio M. Berleze<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

<sup>2</sup>Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

Recebido em 5/9/2006; Aceito em 13/9/2006

O objetivo deste trabalho é mostrar o uso do teorema de van der Pauw e sua dedução. Este teorema permite determinar a condutividade elétrica de placas planas com perímetros arbitrários, espessura uniforme e quatro contatos sobre a periferia.

**Palavras-chave:** teorema de van der Pauw, condutividade elétrica.

The goal of this work is to show the use of the van der Pauw theorem and its deduction. This theorem allows to determine the electric conductivity of flat plates with arbitrary perimeters, uniform thickness and four contacts on the periphery.

**Keywords:** van der Pauw theorem, electrical conductivity.

## 1. Introdução

A medida da condutividade elétrica de um condutor normalmente é realizada utilizando-se a lei de Ohm. Por exemplo, para um condutor retilíneo de seção transversal circular uniforme a condutividade elétrica é dada por  $\sigma = \frac{\ell}{RS}$ , onde  $R$  é a resistência elétrica,  $S$  a seção transversal e  $\ell$  o comprimento. O principal obstáculo nesta medida são as resistências de contato nas faces terminais a qual é indefinida e incontrolável. Esta foi a razão pela qual Thomson substituiu a ponte de Wheatstone por uma ponte de circuito mais elaborado.

Em 1958 L.J. van der Pauw [1, 2] deduziu uma expressão que permite medir a condutividade  $\sigma$  de um filme condutor de espessura uniforme  $h$  (ou a condutividade de um eletrólito espalhado sobre a superfície de um vaso de fundo plano horizontal com espessura uniforme  $h$ ). Esta expressão recebeu o nome de teorema de van der Pauw, o qual é dado por

$$\exp(-\pi h R_{AB,CD} \sigma) + \exp(-\pi h R_{BC,DA} \sigma) = 1, \quad (1)$$

onde  $R_{AB,CD} = \frac{U_{DC}}{I_{AB}}$  e  $R_{BC,DA} = \frac{U_{AD}}{I_{BC}}$ , são chamadas resistências de transferência e definidas, por exemplo, como a relação entre a diferença de potencial entre os nós D e C e a corrente entre os nós A e B da Fig. 1. A corrente entra na amostra pelo contato A e deixa a amostra pelo contato B. A condutividade e o efeito Hall podem ser medidos desde que o contorno da amostra onde estão localizados os pontos A, B, C e D tenha

forma arbitrária e satisfaça as seguintes condições:

- Os contatos estão localizados na circunferência da amostra.
- Os contatos são suficientemente pequenos.
- A amostra é homogênea em espessura.
- A superfície da amostra é simplesmente conexa, isto é, a amostra não tem furos isolados.

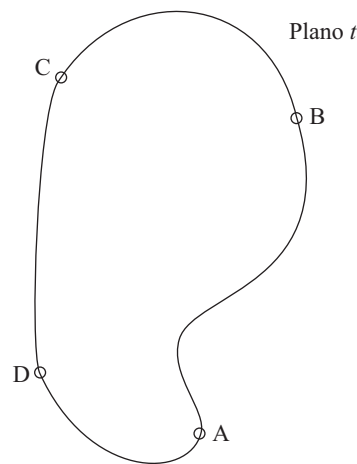


Figura 1 - Placa condutora de espessura uniforme e circunferência arbitrária no plano complexo  $t$ . Os pontos A, B, C, e D são os contatos elétricos nas extremidades.

Segundo H.B.G. Casimir, quando diretor do laboratório de pesquisas da Philips, o teorema de van der Pauw é um exemplo de como uma técnica pouco sofis-

<sup>1</sup>E-mail: rene@lactec.org.br.

ticada de matemática pode fornecer um resultado extremamente prático.

## 2. Teoria

Para provar a Eq. (1), mostraremos que ela vale para uma particular forma da amostra. Sendo válida para esta particular forma ela vale para qualquer outra forma, tendo em vista as propriedades da teoria das transformações conforme Bewley [3], ou seja, as resistências são invariantes sob a transformação conforme. Para a particular forma escolheremos um semi-plano infinito com contato nos pontos P, Q, R e S ao longo do contorno (Fig. 2). É sempre possível achar uma função analítica  $t(z)$  tal que o semi-plano superior tenha como imagem a amostra no plano complexo  $t$ . Em particular os pontos A, B, C e D no plano complexo  $t$  têm como imagem os pontos P, Q, R e S no plano complexo  $z$ .

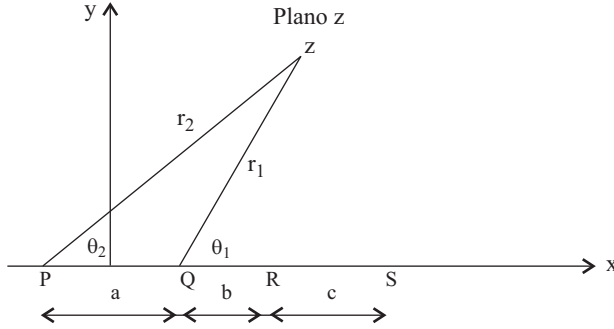


Figura 2 - Plano complexo  $z = x + iy$  semi-infinito ( $y \geq 0$ ). Os pontos P, Q, R, S e T são contatos elétricos correspondentes aos pontos A, B, C e D no plano complexo  $t$ .

Seja  $w = \frac{A}{2\pi} \ln\left(\frac{z+\frac{a}{2}}{z-\frac{a}{2}}\right) = u + iv$  onde  $z = x + iy$  e  $w = u + iv$  e  $A$  uma constante. Expressando  $z \pm \frac{a}{2}$  em coordenadas polares ficamos com  $u = \frac{A}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$  e  $v = \frac{A}{2\pi} \ln(\theta_2 - \theta_1)$ .

Na Fig. 3 mostram-se as linhas de corrente  $v = const$  e as linhas equipotenciais  $u = const$ , que são famílias de círculos com parâmetros  $v$  e  $u$ , respectivamente. Então a diferença de potencial entre os pontos R e S é

$$U_R - U_S = \frac{A}{2\pi} \ln\left[\frac{(a+b)(b+c)}{b(a+b+c)}\right]. \quad (2)$$

De modo análogo, se a corrente for injetada pelo contato Q e retirada pelo contato R (Fig. 4), obtém-se para a diferença de potencial entre os pontos S e P a equação

$$U_S - U_P = \frac{A}{2\pi} \ln\left[\frac{(b+c)(a+b)}{ac}\right]. \quad (3)$$

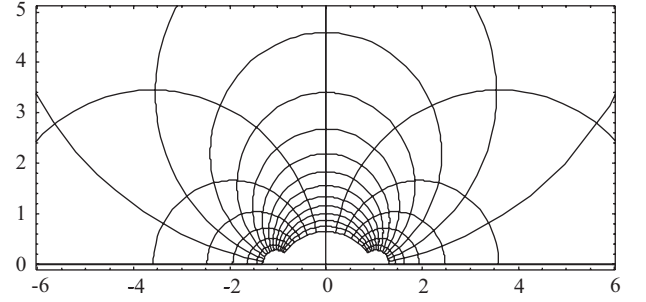


Figura 3 - Linhas de campo elétrico e as equipotenciais com injeção de correntes nos pontos P e Q.

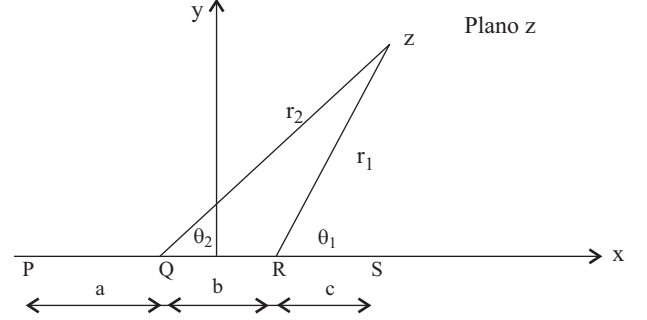


Figura 4 - Plano  $z$  onde injeta-se a corrente nos pontos Q e R para a medida das diferenças de potenciais nos pontos P e S.

Com  $A = \frac{2I}{h\sigma}$ , onde  $I$  é a corrente elétrica,  $h$  a espessura da amostra e  $\sigma$  a sua condutividade elétrica. Portanto, das Eqs. (2) e (3), as resistências de transferência ficam

$$R_{PQ,RS} = \frac{U_R - U_S}{I_{PQ}} = \frac{1}{\pi h\sigma} \ln\left[\frac{(a+b)(b+c)}{b(a+b+c)}\right], \quad (4)$$

e

$$R_{QR,SP} = \frac{U_S - U_P}{I_{QR}} = \frac{1}{\pi h\sigma} \ln\left[\frac{(a+b)(b+c)}{ac}\right]. \quad (5)$$

Tendo em vista que

$$\frac{b(a+b+c)}{(a+b)(b+c)} + \frac{ac}{(a+b)(b+c)} = 1,$$

obtém-se

$$\exp(-\pi h\sigma R_{PQ,RS}) + \exp(-\pi h\sigma R_{QR,SP}) = 1, \quad (6)$$

a qual é a equação fundamental do teorema de van der Pauw cujo uso atualmente é bastante difundido [4, 5, 7, 8].

No caso geral não é possível determinar a condutividade elétrica  $\sigma$  ou a resistividade elétrica  $\rho$  da Eq. (6), como uma função conhecida. A solução contudo pode ser obtida a partir da equação

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{\pi h}{\ln(2)} \frac{R_{PQ,RS} + R_{QR,SP}}{2} f, \quad (7)$$

onde  $f$  é um fator que depende somente da relação  $\frac{R_{PQ,RS}}{R_{QR,SP}}$  conforme mostra a Fig. 5, a qual é especificada pela fórmula

$$\cosh\left[\frac{R_{PQ,RS}/R_{QR,SP} - 1 \ln(2)}{R_{PQ,RS}/R_{QR,SP} + 1 f}\right] = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\ln(2)}{f}\right)$$

(vide apêndice A).

Desta forma determina-se a condutividade ou a resistividade elétrica tirando-se  $f$  da Fig. 5 e usando-se a Eq. (7).

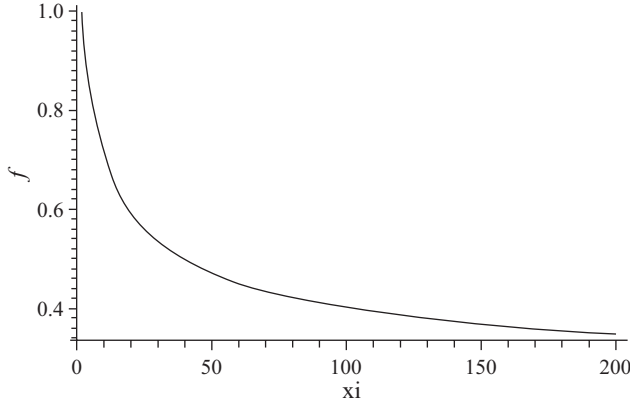


Figura 5 - Correlação entre os valores do parâmetro  $f$  e a relação entre as resistências  $R_{AB,CD}$  e  $R_{BC,DA}$ . O parâmetro  $xi$  é definido por  $xi = \frac{R_{AB,CD}/R_{BC,DA}-1}{R_{AB,CD}/R_{BC,DA}+1}$  conforme Eq. (V) do apêndice A.

Um caso particular é aquele quando a linha PR da Fig. 6 é uma linha de simetria da amostra e Q e S estão dispostos simetricamente com relação a linha PR, neste caso  $R_{PQ,RS} = R_{QR,SP}$  e então

$$\rho = \frac{\pi h}{\ln(2)} R_{PQ,RS}. \quad (8)$$

O coeficiente de Hall também pode ser determinado [1, 2, 6] com esta técnica, tendo a amostra uma forma qualquer e espessura uniforme  $h$ . Mede-se a resistência  $R_{PQ,RS}$  sem campo de indução magnética. Aplicando um campo de indução magnética  $\mathbf{B}$  uniforme e perpendicular à amostra mede-se novamente a resistência  $R_{PQ,RS}$ . A variação de resistência  $\Delta R_{PQ,RS}$  permite calcular o coeficiente de Hall  $R_H$  o qual é dado por

$$R_H = \frac{h}{B} \Delta R_{PQ,RS}. \quad (9)$$

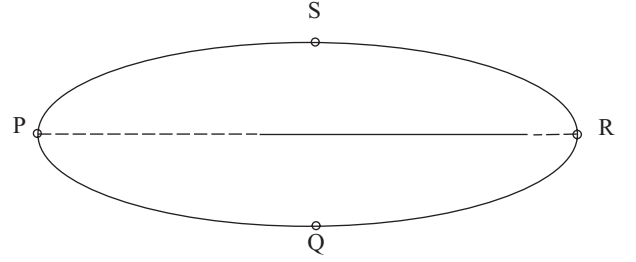


Figura 6 - Placa com simetria onde QR é um dos eixos de simetria.

### 3. Experimento

Como exemplo experimental, determinamos a resistividade de uma placa de circuito impresso e de uma placa de cobre. As características geométricas das placas são as seguintes:

Placa de circuito impresso -  $h = (69 \pm 7) \mu\text{m}$ ,  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 15 \text{ cm}$ .

Placa de cobre -  $h = (0.212 \pm 0.004) \text{ mm}$ ,  $a = 9,5 \text{ cm}$ ,  $b = 13 \text{ cm}$ .

Os equipamentos elétricos usados nos experimentos foram: Sensitive Digital Voltmeter Keithley 182, Calibrador Fluke 5720 e micrometro Mitutoyo 0-25 mm precisão 0,001 mm.

Os eletrodos A, B, C e D foram tomados simetricamente nas placas retangulares, soldados com solda Pb-Sn e usou-se injeção de correntes diferentes de respectivamente 1 A e 2 A. A Eq. (7) foi usada para o cálculo da resistividade das amostras. As Tabelas 1 e 2 resumem os resultados obtidos, cuja temperatura das medidas era 23 °C.

Tabela 1 - Dados da placa de circuito impresso.

$I_{AB}(A)$	$V_{CD}(\mu V)$	$I_{BC}(A)$	$V_{DA}(\mu V)$	$R_{AB,CD}(\mu\Omega)$	$R_{BC,DA}(\mu\Omega)$
1	$59,50 \pm 0,42$	1	$61,80 \pm 0,14$	$59,50 \pm 0,42$	$61,80 \pm 0,14$
2	$117,85 \pm 1,48$	2	$124,40 \pm 1,13$	$58,93 \pm 0,74$	$62,60 \pm 0,57$

Tabela 2 - Dados da placa de cobre.

$I_{AB}(A)$	$V_{CD}(\mu V)$	$I_{BC}(A)$	$V_{DA}(\mu V)$	$R_{AB,CD}(\mu\Omega)$	$R_{BC,DA}(\mu\Omega)$
1	$23,45 \pm 1,91$	1	$24,30 \pm 1,13$	$23,45 \pm 1,91$	$24,30 \pm 1,13$
2	$46,25 \pm 0,92$	2	$48,65 \pm 1,06$	$23,13 \pm 0,46$	$24,33 \pm 0,53$

Com o uso da Eq. (7) e calculando o fator  $f$  usando o software Mathematica<sup>®</sup>, obtém-se para as resistividades das amostras os seguintes valores:

Circuito impresso  $\rho = (1,899 \pm 0,003) \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$

Placa de cobre  $\rho = (2,29 \pm 0,01) \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ .

Estes valores diferem do valor citado na literatura [9] para o cobre recozido [10]  $\rho = 1,72 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$  a

temperatura de 20 °C. Na Fig. 7 mostra-se o perfil de cobre no circuito impresso onde se constata a não uniformidade do mesmo.

Com o objetivo de verificar se a diferença na resistividade obtida com relação à tabelada é devida a tensões mecânicas ou impurezas no cobre procedeu-se primeiramente a um recozimento térmico a temperatura de

650 °C durante 10 min. O cobre teve sua espessura reduzida por oxidação para  $(0,199 \pm 0.006)$  mm. O resultado obtido para a nova resistividade foi  $\rho = (2,27 \pm 0,08) \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ .

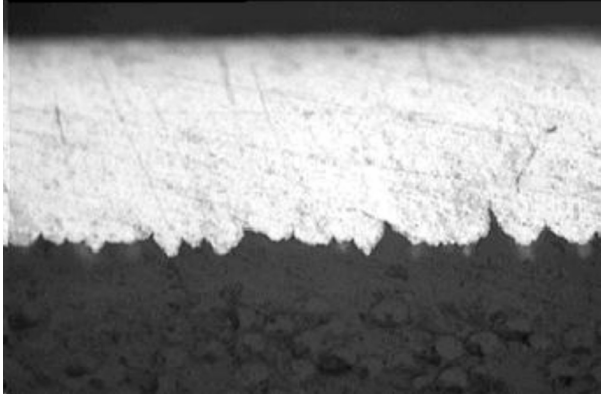


Figura 7 - Perfil da placa de cobre do circuito impresso com espessura média em torno de  $69 \mu\text{m}$  usada em nossas medidas.

A análise química da placa de cobre foi realizada com a técnica de absorção atômica e forneceu os seguintes resultados (parte por milhão) em massa:

- Ni - 52,58 ppm
- Be - 8,40 ppm
- Zn - 29,35 ppm
- Al - 32,00 ppm.

Outro método, chamado método dos quatro terminais, foi usado para determinar a resistividade da chapa de cobre. A chapa de cobre usada tinha as seguintes dimensões:  $a = 112$  mm,  $b = 26,5$  mm e  $h = (0,1970 \pm 0,0019)$  mm. O resultado obtido foi  $\rho = (2,29 \pm 0,03) \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ , à temperatura de 20 °C. A conclusão a que se chega é que a solda dos contatos, a não uniformidade da espessura e as impurezas são as causadoras da discrepância entre os valores medidos e os valores tabelados.

Outras medidas realizadas em um placa de cobre com dimensões  $a = 15,5$  cm,  $b = 9,8$  cm e  $h = (0,096 \pm 0,002)$  mm, porém sem uso de solda de Pb-Sn nos contatos, forneceram os seguintes resultados:

$$R_{AB,CD} = (3,97 \pm 0,03) \times 10^{-5} \Omega$$

$$R_{BC,DA} = (4,19 \pm 0,03) \times 10^{-5} \Omega$$

Com o uso da Eq. (7) e calculando com o Mathematica® o parâmetro  $f = 0,9993147$  obtém-se para o valor da resistividade  $\rho = (1,78 \pm 0,01) \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ , o que corresponde a resistividade do cobre duro. Do resultado se conclui que a solda modifica a resistividade de maneira acentuada.

## Apêndice A

Da Eq. (1) podemos escrever,  $\exp(-\pi h R' / \rho) + \exp(-\pi h R'' / \rho) = 1$  onde fizemos  $R' = R_{AB,CD}$  e

$R'' = R_{BC,DA}$ . Chamando agora  $x = \pi h R'$  e  $y = \pi h R''$  ficamos com a equação

$$\exp(-x/\rho) + \exp(-y/\rho) = 1.$$

Multiplicando esta última equação por  $\exp(\frac{x+y}{2\rho})$  obtém-se

$$\frac{x+y}{2\rho} = \ln[2 \cosh(\frac{x-y}{2\rho})]. \quad (\text{I})$$

Definindo o fator  $f$  como

$$\frac{\ln(2)}{f} = \ln[2 \cosh(\frac{x-y}{2\rho})], \quad (\text{II})$$

e agora eliminando  $x-y$  obtém-se

$$\frac{x-y}{2\rho} = \arccos h\left[\frac{\exp(\frac{\ln(2)}{f})}{2}\right]. \quad (\text{III})$$

Da Eq. (I) e tendo em vista a Eq. (II), obtém-se

$$\frac{x+y}{2\rho} = \frac{\ln(2)}{f}. \quad (\text{IV})$$

Dividindo (III) por (IV) resulta

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{f}{\ln(2)} \arg \cosh\left[\frac{\exp(\frac{\ln(2)}{f})}{2}\right],$$

ou

$$\cosh\left[\frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{x}{y} + 1} \frac{\ln(2)}{f}\right] = \frac{\exp(\frac{\ln(2)}{f})}{2}, \quad (\text{V})$$

que é a equação citada no texto.

## Referências

- [1] L.J. van der Pauw, Philips Research Reports **13**, 1 (1958).
- [2] L.J. van der Pauw, Philips Technical Review **20**, 220 (1958/59).
- [3] L.V. Bewley, *Two-Dimensional Fields in Electrical Engineering* (Dover Publications Inc., New York, 1963).
- [4] S. Amer, Solid-State Electronics **6**, 141 (1963).
- [5] P.M. Hemenger, Rev. Sci. Instruments **44**, 698 (1973).
- [6] R. Chwang, B.J. Smith and C.R. Crowell, Solid-State Electronics **17**, 1217 (1974).
- [7] A.I. Olayinka and A.O. Sogbetun, African Journal of Science and Technology **3**, 93 (2002).
- [8] K. Polivanov, *The Theory of Electromagnetic Field* (Mir Publishers, Moscow, 1983), p. 143.
- [9] W.D. Callister Jr., *Ciência e Engenharia de Materiais* (LTC Editora, Rio de Janeiro, 2002), p. 421, p. 551.
- [10] *Siemens, Manual de Engenharia Elétrica* (Livraria Nobel S.A., São Paulo, 1988), v. 1, p. 147.