

Artigos Gerais

Técnicas e construções de ensembles de matrizes aleatórias e estatísticas correlatas

(Constructions and techniques in random matrix ensembles and related statistics)

A.C. Bertuola¹, M.S. Hussein² e M.P. Pato²

¹Centro Federal de Educação Tecnológica de Petrolina, Petrolina, PE, Brasil

²Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brazil

Recebido em 1/3/2006; Aceito em 18/5/2006

Apresentamos neste artigo duas construções distintas do ensemble ortogonal gaussiano. Para tornar esse trabalho mais didático, usamos as matrizes de ordem dois. Dessa forma, obtivemos analiticamente: a distribuição das matrizes, a distribuição de um elemento da matriz, a distribuição dos espaçamentos, a distribuição de uma componente de um autovetor e a densidade de estados. Para confirmar os cálculos, apresentamos as simulações numéricas.

Palavras-chave: matriz aleatória, Wigner, Poisson.

In this paper we present two distinct constructions of the gaussian orthogonal ensemble. For didactic purposes we consider matrices of dimension 2. In this manner we obtain analytical results for the distribution of the elements of the matrices, the spacing, one component of the wave functions and also the density of states. We compare our analytical results with numerical simulations.

Keywords: random matrix, Wigner, Poisson.

1. Introdução

Em meados dos anos 50 do século passado, Eugene Wigner (Nobel de Física em 1963) criou a Teoria das Matrizes Aleatórias (RMT), com o objetivo de estudar as estatísticas dos níveis de energia dos núcleos de átomos pesados. Ele descobriu que a estatística das flutuações dos níveis desses átomos pesados, obtidos experimentalmente, coincidia com a estatística das flutuações na densidade de autovalores, obtidos a partir das diagonalizações das matrizes, cujos elementos eram gerados aleatoriamente e sujeitos a uma distribuição gaussiana. Sua principal conjectura seria a descrição de um sistema complexo por um ensemble de matrizes aleatórias. Com as intensificações das pesquisas nessa área, muitos outros espectros quantizados, de diversas áreas do conhecimento², foram estudados com muito interesse. A figura a seguir [1, 2, 3, 4] exibe seis espectros quantizados nas áreas de Física e Matemática.

Os espectros quantizados na Fig. 1 estão desdobrados³, melhor dizendo, re-escalados para que seus espaçamentos médios assumam o valor unitário. Nes-

sas condições, as flutuações destes espectros podem ser comparadas entre si.

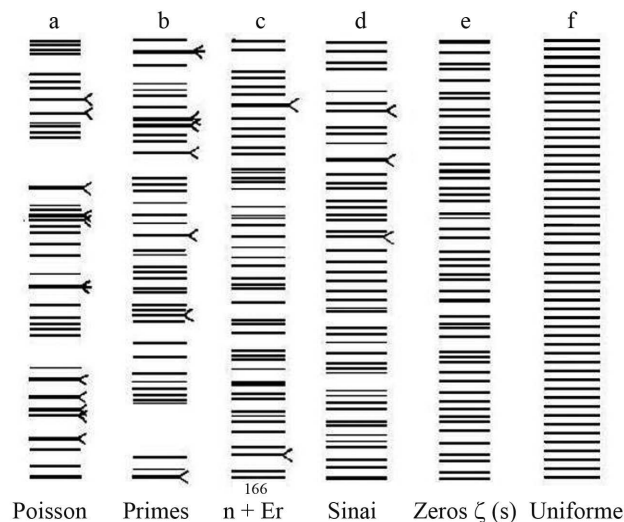


Figura 1 - Espectros quantizados.

¹E-mail: acbertuola@cefetpet.br.

²Uma revisão das aplicações da teoria das matrizes aleatórias pode ser encontrada na referência [5].

³De um modo geral, aplica-se uma transformação no espectro E_i , matematicamente dada por $x_i = \bar{N}(E_i)$, em que $\bar{N}(E)$ é a densidade de estado da função *escada*. Recomendamos as referências [6, 2].

Uma das medidas estatísticas mais importantes nesse estudo é a distribuição dos espaçamentos entre os níveis vizinhos, pois acredita-se que esta contenha um caráter universal. Os espaçamentos entre os níveis vizinhos nos espectros (a) e (b) seguem a distribuição de Poisson⁴

$$P(s) = e^{-s} . \quad (1)$$

Esta distribuição (1) encontra-se normalizada e re-normalizada para um espaçamento médio unitário. Recomendamos que o leitor efetue os cálculos, considerando inicialmente a distribuição:

$$P(s) = ke^{-\gamma s} . \quad (2)$$

A seguir, usando-se as igualdades:

$$\int_0^\infty ds P(s) = 1 \quad (3)$$

e

$$\int_0^\infty dss P(s) = 1 , \quad (4)$$

determine os valores de k e γ , respectivamente. Observa-se a presença da degenerescência desses espectros refletida na condição: $P(0) = 1$. Nesse caso, costuma-se dizer que não existe a repulsão entre os níveis.

Os espectros (c), (d) e (e) estão sujeitos à distribuição de espaçamentos de Wigner

$$P(s) = Cs^\beta e^{-\alpha s^2} , \quad (5)$$

com a condição⁵ $\beta > 0$. Os espectros descritos por (5) possuem as repulsões entre os níveis: $P(0) = 0$. A constante C é determinada usando-se a normalização (3) da distribuição; o parâmetro α é fixado assumindo que o espaçamento médio seja unitário (4). O parâmetro β caracteriza os três ensembles gaussianos [1] existentes. O Ensemble Ortogonal Gaussiano (GOE), cuja intensidade da repulsão entre os níveis é dada por $\beta = 1$, descreve os espectros (c) e (d) do núcleo do Érbio e do bilhar de Sinai, respectivamente. O Ensemble Unitário Gaussiano (GUE), em que $\beta = 2$, descreve o espectro (e), que são os zeros da função Zeta de Riemann [1]. O Ensemble Simplético Gaussiano (GSE) é caracterizado por $\beta = 4$. Por outro lado, a estatística do espectro cerca⁶ do oscilador harmônico quântico (f) não está submetida à distribuição de Poisson (1) ou à distribuição de Wigner (5). Os valores de β estão relacionados com o tipo de simetria que o sistema apresenta, de acordo com uma atual classificação estabelecida, mostrada na Tabela [2] a seguir.

Tabela 1 - Classificação dos sistemas físicos quanto à simetria.

Invariância por reversão temporal	Momento angular	Invariância rotacional	Matriz hamiltoniana	Grupo canônico	β	f
Sim	inteiro $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$	- sim	real simétrica	ortogonal (GOE)	1	$\frac{n(n+1)}{2}$
Sim	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$	não	quaternion real	simplético (GSE)	4	$n(2n+1)$
Não	-	-	hermiteana complexa	unitário (GUE)	2	n^2

Observa-se na tabela⁷ que as matrizes hamiltonianas do GOE possuem as invariâncias por reversão temporal e rotacional, verificadas para partículas de spin semi-inteiros. Nesse ensemble, as matrizes são simétricas e seus elementos são números reais. Verificou-se para partículas com spin semi-inteiro, que as matrizes hamiltonianas do GSE possuem invariância por reversão temporal, mas não possuem a invariância rotacional. Esse ensemble é representado por matrizes cujos elementos são quaternions reais. As matrizes hamiltonianas do GUE não possuem invariância por re-

versão temporal e ainda não foi verificada invariância rotacional para partículas com spin. As distribuições dos espaçamentos dos ensembles GOE, GUE e GSE têm um lugar de destaque pela sua importância no estudo do “caos quântico”. De acordo com a conjectura de Bohigas-Giannoni-Schmit [6, 10], um sistema quântico é análogo a um sistema clássico integrável, se o seu espectro for descrito pela distribuição de Poisson (1). Se o sistema quântico for caótico, então seu espectro será descrito pela distribuição de espaçamentos de Wigner (5).

⁴Essa distribuição não é obtida por meio de um ensemble de matrizes. Por isso, nesse trabalho reconhecemos esta como uma estatística correlata.

⁵Observe que a distribuição de Poisson não apresenta o termo s^β , ou seja, não existe a repulsão entre os níveis.

⁶A distribuição dos espaçamentos desse espectro é considerada, nesse trabalho, uma estatística correlata, pois não é obtida de um ensemble de matrizes.

⁷O parâmetro f é o número de elementos independentes.

A seguir, apresentaremos duas maneiras de construir um ensemble de matrizes aleatórias. Algumas distribuições importantes serão obtidas explicitamente, por exemplo, a distribuição dos espaçamentos, a distribuição de um elemento da matriz, a densidade de estados e a distribuição de uma componente dos autovalores. Usaremos as matrizes 2x2, pela simplicidade intrínseca da construção do ensemble e por esta ser realizada totalmente de forma analítica [9, 7, 8]. Por outro lado, a distribuição dos espaçamentos obtida no ensemble de maior ordem difere muito pouco da distribuição dos espaçamentos obtida para matrizes 2x2, consideradas, então, estatisticamente semelhantes. Uma justificativa não rigorosa seria o fato de a repulsão entre os níveis depender somente dos espaçamentos de níveis vizinhos próximos.

2. Wigner e o ensemble ortogonal gaussiano

A primeira construção do GOE foi apresentada pelo Prof. Wigner, tendo sido estruturada na base de duas hipóteses fundamentais. São elas:

- (i) a distribuição dos elementos das matrizes são independentes;
- (ii) a matriz hamiltoniana do sistema é invariante por uma transformação ortogonal.

Veremos a seguir que essas duas hipóteses são suficientes para se obter a distribuição das matrizes.

2.1. Distribuição das matrizes

Seja dada a matriz hamiltoniana simétrica, com elementos reais e aleatórios

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} . \quad (6)$$

Inicialmente, supomos que H seja a matriz resultante da rotação de uma matriz H' arbitrária

$$H = OH'O^T . \quad (7)$$

Nesse caso, O é a matriz de rotação

$$O = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} . \quad (8)$$

A forma explícita da transformação (7) é o sistema li-

⁸O leitor pode verificar esta afirmação calculando o determinante da matriz

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_{11}}{\partial h_{11}} & \frac{\partial h_{11}}{\partial h_{22}} & \frac{\partial h_{11}}{\partial h_{12}} \\ \frac{\partial h_{22}}{\partial h_{11}} & \frac{\partial h_{22}}{\partial h_{22}} & \frac{\partial h_{22}}{\partial h_{12}} \\ \frac{\partial h_{12}}{\partial h_{11}} & \frac{\partial h_{12}}{\partial h_{22}} & \frac{\partial h_{12}}{\partial h_{12}} \end{bmatrix} .$$

As derivadas parciais são obtidas do sistema (9).

⁹Notação: $P(H) = P(h_{11}, h_{22}, h_{12})$.

¹⁰As integrações são efetuadas no intervalo $[-\infty, +\infty]$.

near

$$\begin{cases} h_{11} = \cos^2 \theta h'_{11} + \sin^2 \theta h'_{22} + \sin 2\theta h'_{12} \\ h_{22} = \sin^2 \theta h'_{11} + \cos^2 \theta h'_{22} - \sin 2\theta h'_{12} \\ h_{12} = \sin \theta \cos \theta h'_{11} + \sin \theta \cos \theta h'_{22} + \cos 2\theta h'_{12} \end{cases} . \quad (9)$$

Uma propriedade importante da transformação (7) é o fato de o jacobiano ter seu valor unitário⁸. Portanto, tem-se

$$P(H)dH = P(OH'O^T)dH' , \quad (10)$$

em que $P(H)$ é a distribuição da matriz, ou seja, a distribuição dos elementos independentes⁹ da matriz. A hipótese (i) é codificada matematicamente por:

$$P(h_{11}, h_{22}, h_{12}) = f_{11}(h_{11})f_{22}(h_{22})f_{12}(h_{12}) , \quad (11)$$

na qual $f_{ij}(h_{ij})$ é a distribuição de um elemento da matriz. Derivando (11) em relação ao ângulo de rotação θ e impondo a condição $\frac{dP}{d\theta} = 0$, obtém-se a igualdade

$$\frac{1}{f_{11}} \frac{\partial f_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{f_{22}} \frac{\partial f_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{f_{12}} \frac{\partial f_{12}}{\partial \theta} = 0 . \quad (12)$$

Derivando as equações do sistema (9) em relação ao ângulo de rotação θ , conseguem-se as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_{11}}{\partial \theta} = -\frac{\partial h_{22}}{\partial \theta} = 2h_{12} \\ \frac{\partial h_{12}}{\partial \theta} = h_{22} - h_{11} \end{cases} . \quad (13)$$

Substituindo (13) na igualdade (12), o resultado é

$$2h_{12} \left[\frac{1}{f_{11}} \frac{\partial f_{11}}{\partial h_{11}} - \frac{1}{f_{22}} \frac{\partial f_{22}}{\partial h_{22}} \right] + (h_{22} - h_{11}) \frac{1}{f_{12}} \frac{\partial f_{12}}{\partial h_{12}} = 0 . \quad (14)$$

Buscando as soluções sujeitas às condições

$$\begin{cases} \frac{1}{f_{11}} \frac{\partial f_{11}}{\partial h_{11}} = a_{11}h_{11} + b_{11} \\ \frac{1}{f_{22}} \frac{\partial f_{22}}{\partial h_{22}} = a_{22}h_{22} + b_{22} \\ \frac{1}{f_{12}} \frac{\partial f_{12}}{\partial h_{12}} = a_{12}h_{12} + b_{12} \end{cases} , \quad (15)$$

substituindo (15) em (14) e lembrando que os elementos da matriz são independentes entre si, obtêm-se

$$\begin{aligned} a_{12} &= \gamma , \\ a_{11} &= a_{22} = 2\gamma , \end{aligned} \quad (16)$$

em que γ é um parâmetro arbitrário. Substituindo os valores estabelecidos em (16) nas equações em (15), e efetuando as integrações pertinentes¹⁰, obtêm-se as distribuições dos elementos da matriz e, conseqüentemente, tendo em vista a igualdade (11), chega-se à distribuição das matrizes

$$P(H) = C \exp \frac{\gamma}{2} \text{tr} H^2 . \quad (17)$$

O parâmetro γ é negativo, para que a condição $\lim_{tr H^2 \rightarrow \pm\infty} P(H) = 0$ seja satisfeita. Por isso, realiza-se uma nova mudança de variável

$$\gamma = -2\alpha, \quad \alpha > 0. \quad (18)$$

Substituindo a distribuição das matrizes (17) - levando-se em consideração o novo parâmetro estabelecido em (18) - na condição de normalização:

$$\int dHP(H) = 1, \quad (19)$$

e lembrando que

$$dH = dh_{11}dh_{22}dh_{12} \quad (20)$$

é o elemento de volume usado na integração, o resultado é a distribuição normalizada das matrizes

$$P(H) = \sqrt{2} \frac{\alpha}{\pi}^{\frac{3}{2}} \exp -\alpha tr H^2. \quad (21)$$

O valor do parâmetro α será convenientemente fixado, de maneira que o espaçamento médio entre os níveis de energia vizinhos seja unitário. Faremos isso a seguir.

2.2. Distribuição dos espaçamentos de Wigner

Para calcular os espaçamentos entre os níveis de energia vizinhos, é necessário diagonalizar a matriz hamiltoniana definida em (6). Inicia-se o processo de diagonalização, considerando-se o sistema escrito em uma notação matricial como

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

em que (c_1, c_2) são as componentes do auto-vetor. O parâmetro E é o autovalor para ser determinado. Os autovalores emergem do cálculo do determinante

$$\det \begin{pmatrix} h_{11} - E & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} - E \end{pmatrix} = 0. \quad (23)$$

Os valores dos autovalores calculados a partir de (23) são

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{h_{11} + h_{22} + \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2}}{2} \\ E_2 &= \frac{h_{11} + h_{22} - \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2}}{2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Tabela 2 - Distribuições re-normalizadas.

$P(H)$	$P(h_{11})$	$P(h_{12})$	$P(s)$
$\frac{1}{2} \exp -\frac{\pi}{2} tr H^2$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \exp -\frac{\pi}{2} h_{11}^2$	$\exp -\pi h_{12}^2$	$\frac{\pi}{2} s \exp -\frac{\pi}{4} s^2$

A Tabela 2 contém as distribuições das matrizes, dos elementos das matrizes e dos espaçamentos entre os níveis vizinhos. Salientamos que a condição de re-normalização ($\langle s \rangle = 1$) foi levada em consideração nas expressões analíticas das distribuições.

Usando-se esses dois valores, prova-se¹¹ que

$$tr H^2 = tr E^2.$$

O espaçamento entre os níveis é obtido subtraindo-se os autovalores em (24), cujo resultado é

$$s = \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2}. \quad (25)$$

Para se calcular a distribuição dos espaçamentos, é necessário realizar os cálculos das integrais

$$P(s) = \int \int \int dHP(H) \delta(s - \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2}), \quad (26)$$

em que $\delta(k)$ é a função delta de Dirac e as integrações são feitas no intervalo $[-\infty, +\infty]$. A primeira providência para integrar a igualdade (26) é fazer as convenientes mudanças de variáveis

$$\begin{cases} x = \frac{h_{11} + h_{22}}{2} \\ y = \frac{h_{11} - h_{22}}{2} \end{cases} \quad (27)$$

O jacobiano dessa transformação é

$$\frac{\partial(h_{11}, h_{22})}{\partial(x, y)} = 2. \quad (28)$$

Desse modo, após realizar uma integração na variável x , obtem-se apenas duas novas integrais:

$$P(s) = \frac{2\alpha}{\pi}^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \int \int dy dh_{12} e^{-\alpha(y^2 + h_{12}^2)} \delta(s - \sqrt{4(y^2 + h_{12}^2)}). \quad (29)$$

A própria igualdade (29) sugere o uso das coordenadas polares, ou seja,

$$\begin{aligned} y &= r \sin \beta \\ h_{12} &= r \cos \beta. \end{aligned} \quad (30)$$

Após alguns cálculos e manipulações algébricas, o resultado final é

$$P(s) = \alpha s \exp -\frac{\alpha}{2} s^2. \quad (31)$$

Substituindo essa distribuição na igualdade (4), obtem-se

$$\alpha = \frac{\pi}{2}. \quad (32)$$

A tabela a seguir contém um resumo das distribuições obtidas até agora.

¹¹Recomendamos aos interessados que verifiquem essa afirmação, efetuando os cálculos.

2.3. Densidade de estados

A densidade de estado é muito importante para as aplicações e pode ser calculada por meio da igualdade

$$\rho(E) = \frac{1}{2} [\rho_1(E) + \rho_2(E)] , \quad (33)$$

em que

$$\rho_1(E) = \int dH P(H) \delta \left[E - \left(\frac{h_{11} + h_{22} + \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2}}{2} \right) \right] \quad (34)$$

e

$$\rho_2(E) = \int dH P(H) \delta \left[E - \left(\frac{h_{11} + h_{22} - \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2}}{2} \right) \right] . \quad (35)$$

Os cálculos das integrais nas igualdades (34) e (35) são análogos àqueles realizados para as integrais na igualdade (26). A distribuição das matrizes $P(H)$ está definida na igualdade (21) e dH é o mesmo elemento de volume definido em (25). Efetuar essas contas significa, para nós, desenvolver as habilidades em técnicas matemáticas. O resultado desses esforços é a expressão analítica

$$\rho(E) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{-\alpha E^2} \left[e^{-\alpha E^2} + \sqrt{\alpha\pi} E \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha} E) \right] . \quad (36)$$

O valor de α já está estabelecido em (32). A representação gráfica da densidade de estado (36) será mostrada mais adiante.

2.4. Distribuição de uma componente dos auto-vetores

Seja um autovetor \mathbf{c} associado ao autovalor E_1 , cujas componentes (c_1, c_2) são obtidas por meio do sistema (22). As duas equações desse sistema são linearmente dependentes, portanto é necessário considerar uma condição adicional de normalização

$$c_1^2 + c_2^2 = 1 . \quad (37)$$

O resultado para uma das componentes está no argumento da função delta na igualdade:

$$P(c_1) = \int dH P(H) \delta \left\{ c_1 - \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{h_{22}-h_{11}}{2h_{12}} + \sqrt{\left(\frac{h_{22}-h_{11}}{2h_{12}} \right)^2 + 1} \right]^2 + 1}} \right\} . \quad (38)$$

As técnicas matemáticas usadas para efetuar as integrações em (38) são as mesmas que se tem usado até aqui nesse trabalho. Após uma quantidade razoável de manipulações matemáticas, chega-se à distribuição

$$P(c_1) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-c_1^2}} , \quad (39)$$

na qual intervalo de variação da componente c_1 é $-1 < c_1 < 1$.

A forma analítica para a componente c_2 coincide com a distribuição já estabelecida na igualdade (39)

$$P(c_2) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-c_2^2}} . \quad (40)$$

A distribuição (39) está representada graficamente na Fig. 2, onde é exibido o gráfico da distribuição para

componente c_1 . O ponto de mínimo dessa distribuição é: $c_1^{min} = \frac{1}{\pi}$. A normalização (37) fixa o tamanho do vetor \mathbf{c} , mas a direção resulta arbitrária.

A distribuição angular pode ser obtida a partir da igualdade

$$P(c_1)dc_1 = P(\theta)d\theta . \quad (41)$$

Usando a distribuição (39) na igualdade (41), o resultado é a distribuição angular

$$P(\theta) = \frac{1}{\pi} . \quad (42)$$

A distribuição angular é constante, indicando a existência de uma simetria angular (Fig. 3).

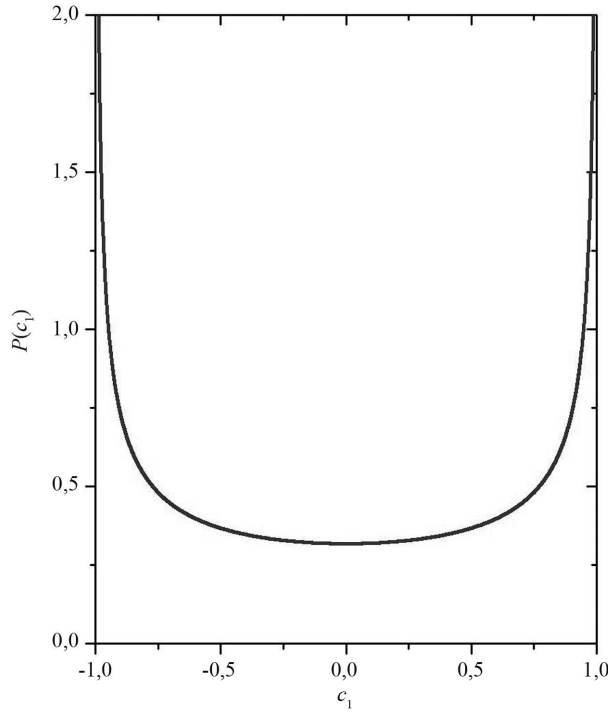


Figura 2 - Distribuição da componente de um auto-vetor.

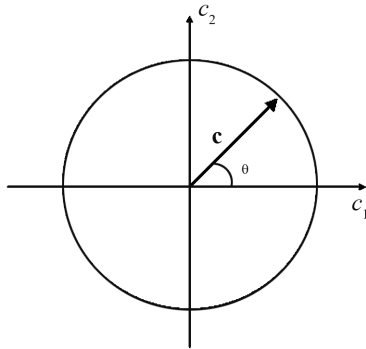


Figura 3 - Simetria angular de um auto-vetor.

3. O ensemble ortogonal gaussiano e a teoria da informação

Uma forma alternativa para se obter a distribuição das matrizes do GOE foi proposta por Balian [11], em 1968, usando a Teoria da Informação. Para isso, a entropia da informação de Boltzmann-Gibbs-Shanon foi adaptada para as matrizes aleatórias. A normalização e a existência do valor médio do traço do quadrado da matriz são os vínculos necessários para essa construção. Define-se uma função auxiliar F , que reúne a entropia da informação e os dois vínculos em uma única ex-

pressão analítica dada por

$$F = - \int dHP \ln P + \lambda_1 \left[1 - \int dHP \right] + \lambda_2 \left[\mu - \int dH \text{tr} H^2 P \right], \quad (43)$$

na qual definimos $\mu = \langle \text{tr} H^2 \rangle$ e omitimos o argumento da distribuição $P = P(H)$. Os parâmetros λ_1 e λ_2 são os multiplicadores de Lagrange. A distribuição $P(H)$ é obtida por meio da condição $\delta F = 0$ que, nesse caso, basta derivar (43) em relação a P . O resultado é semelhante àquele da igualdade (17). Para fixar as constantes envolvidas, usam-se as condições de normalização e o espaçamento médio unitário, tal como foi feito anteriormente. Salientamos que esse método não acrescenta nenhum resultado daqueles que foram obtidos com o formalismo de Wigner. No entanto, com a proposta de uma nova forma para a entropia [12, 13], esse método passou a ter um destaque no tocante às construções de novos ensembles [14] e seus consequentes resultados.

4. Simulação e algoritmo

Nessa área de pesquisa é comum realizar uma simulação numérica do ensemble, para verificar se as predições teóricas foram estabelecidas corretamente¹². Para isso, geram-se os elementos aleatórios das matrizes, de acordo com a gaussiana exibida na Tabela 2. A seguir, cada uma das matrizes geradas é diagonalizada, usando-se diretamente as igualdades estabelecidas em (24). Então, os histogramas dos elementos da matriz, dos espaçamentos e dos autovalores são construídos e ajustados pelas suas respectivas distribuições teóricas (31) e (36), levando-se em consideração o valor do parâmetro α , fixado de acordo com a igualdade (32).

O algoritmo [15] é aquele que transforma os números aleatórios gerados¹³, sujeitos a uma distribuição constante, em outros novos números que seguem uma estatística do tipo gaussiana.

A distribuição constante de números aleatórios no intervalo $[0, 1]$, desenhada na Fig. 4, tem uma expressão analítica simples dada por

$$\rho(\xi) = 1. \quad (44)$$

Dado um par de números (ξ, η) sujeitos a essa distribuição constante, é possível obter outro par de números (x, y) aleatórios, independentes e sujeitos à distribuição gaussiana conjunta, que explicitamente é escrita na forma

$$P(x, y) = \frac{\alpha}{\pi} \exp \left[-\alpha (x^2 + y^2) \right]. \quad (45)$$

¹²Para os ensembles de matrizes 2x2 essa simulação é somente para conferir as contas. No caso dos ensembles de matrizes NxN existem estatísticas que são determinadas por simulações.

¹³O gerador usado nesse trabalho é aquele contido na linguagem de programação Pascal.

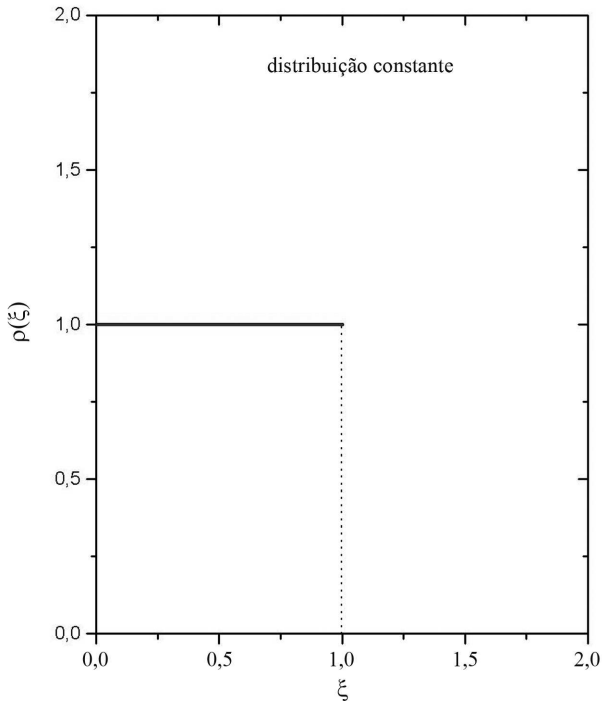


Figura 4 - Distribuição constante de números no intervalo [0,1].

Realizando-se uma transformação das coordenadas (x, y) para as coordenadas polares (r, θ) , por meio das duas igualdades contidas no sistema

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}, \quad (46)$$

e usando-se a igualdade entre as seguintes probabilidades

$$P(x, y) dx dy = Q(r, \phi) dr d\phi, \quad (47)$$

obtem-se a distribuição conjunta normalizada

$$Q(r, \phi) = \frac{\alpha}{\pi} r \exp(-\alpha r^2). \quad (48)$$

Integrando ambos os membros da igualdade (48) na coordenada ϕ , e também reconhecendo a igualdade $q(r) = \int d\phi Q(r, \phi)$, obtem-se a distribuição da coordenada radial

$$q(r) = \alpha r \exp(-\alpha r^2). \quad (49)$$

Integrando a distribuição conjunta (48) em relação à coordenada radial r , obtém-se a distribuição angular:

$$q(\phi) = \frac{1}{\pi}. \quad (50)$$

Para se obter as expressões analíticas da transformação entre as coordenadas $(\xi, \eta) \rightarrow (r, \phi)$, usam-se as igualdades de probabilidades

$$\begin{cases} q(r) dr = \rho(\xi) d\xi \\ q(\phi) d\phi = \rho(\eta) d\eta \end{cases}. \quad (51)$$

Usando-se as expressões definidas em (44), (49) e (51), e realizando-se as devidas integrações, obtêm-se as duas igualdades contidas no sistema

$$\begin{cases} r = \left[\frac{-\ln(1-\xi)}{\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \phi = 2\pi\eta \end{cases}. \quad (52)$$

Resumindo, geram-se dois números aleatórios (ξ, η) . A seguir, por meio das igualdades do sistema (52), obtêm-se as coordenadas (r, ϕ) . Finalmente, determinam-se as coordenadas (x, y) por meio das igualdades do sistema (46). Estas últimas coordenadas são números aleatórios gaussianos.

Usando-se o algoritmo descrito acima, geram-se as matrizes e o processo de simulação é iniciado.

Apresentamos na Fig. 5 a simulação dos níveis de energia do ensemble de matriz 2x2, com seu respectivo ajuste, utilizando a expressão analítica teórica da densidade de níveis (36).

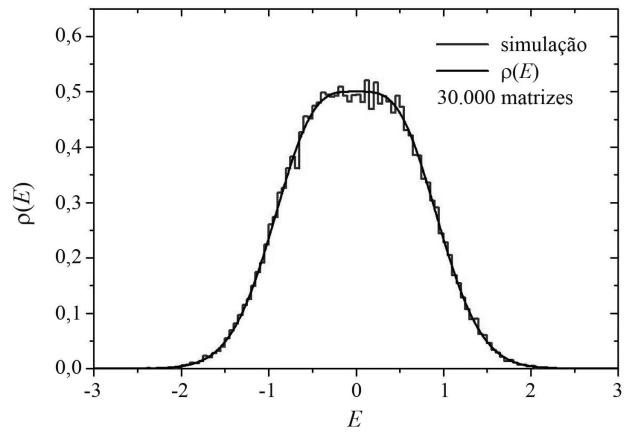


Figura 5 - Densidade de níveis e seu histograma

5. Conclusão

Mostramos duas maneiras de construir um ensemble de matrizes aleatórias. Uma delas é a maneira usada pelo professor Wigner em meados dos anos cinquenta. Outra forma foi proposta pelo professor Balian, que introduziu a entropia da informação para estabelecer a construção das matrizes aleatórias. Para exemplificar, construímos um ensemble de matrizes aleatórias 2x2, com todos os detalhes pertinentes. Obtivemos a distribuição de um elemento da matriz, a distribuição dos espaçamentos, a distribuição de uma componente de um auto-vetor e também a densidade de estados. Apresentamos o algoritmo que gera os elementos da matriz, e a comparação da expressão analítica teórica da densidade de estados com o histograma dos autovalores simulados. Concluímos a exatidão das distribuições previstas teoricamente pelo ensemble e, ao mesmo tempo, a eficiência do algoritmo utilizado na simulação.

6. Agradecimentos

Agradecemos a J.A. Mangabeira pela leitura e correções do texto, bem como também ao árbitro anônimo pelas valiosas sugestões. O CNPq e a FAPESP financiam as pesquisas de M.S. Hussein e M.P. Pato. O CEFET de Petrolina financia as pesquisas de A.C. Bertuola.

Referências

- [1] M.L. Mehta, *Random Matrices* (Academic Press, New York, 2004), 3rd ed.
- [2] O. Bohigas, in *Chaos and Quantum Physics*, edited by M.-J. Giannoni, A. Voros and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1991).
- [3] O. Bohigas, Nucl. Phys. A **751**, 343c (2005).
- [4] O. Bohigas and M.J. Giannoni, Lecture Notes in Physics **209**, 1 (1984).
- [5] T. Guhr, A. Müller-Groeling, H.A. Weidenmüller, Phys. Rep. **299**, 189 (1998).
- [6] M.P. Pato, *100 anos de Física Quântica* (Livraria da Física Editora, São Paulo, 2001).
- [7] L.E. Reichl, *The Transition to Chaos: Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations* (Springer-Verlag, New York, 2004), 2nd ed.
- [8] H. Stockmann, *Quantum Chaos, an Introduction* (Cambridge Press, Cambridge, 1999).
- [9] A. Bohr and B.R. Mottelson, *Nuclear Structure*, v. I, (W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969).
- [10] O. Bohigas, M.J. Giannoni e C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984).
- [11] R. Balian, Nuevo Cimento **B57**, 183 (1968).
- [12] C. Tsallis, Journal Statistical Physics **52**, 479 (1988).
- [13] E.P. Borges, Rev. Bras. Ens. Fis. **21**, 453 (1999).
- [14] Alguns trabalhos recentes, variados, têm sido publicados nas formas de artigo, tese e proceeding. Citamos alguns: A.C. Bertuola, O. Bohigas and M.P. Pato, Physical Review E **70**, 065102(R) (2004); A.C. Bertuola, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2004 (unpublished); A.C. Bertuola e M.P. Pato, *Tendências da Física Estatística no Brasil* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2003), 1^a ed.
- [15] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in Pascal* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).