

Sobre o limite quântico-clássico do gás perfeito

(On the quantum-classical limit for the perfect gas)

G.F. Leal Ferreira¹

Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil

Recebido em 27/1/2006; Aceito em 13/4/2006

Estuda-se a transição entre os comportamentos quântico e clássico do gás perfeito, atribuindo-a ao fenômeno quântico da abertura do pacote, quando, em densidades decrescentes, ela se sobrepõe ao efeito localizador das colisões.

Palavras-chave: gás perfeito, tratamentos clássico e quântico, abertura do pacote.

The transition between the quantum and classical behavior of the perfect gas is studied and attributed to the opening of the wave packet when, for decreasing gaz densities, it becomes more important than the localizing action by collisions.

Keywords: perfect gas, classical and quantum behavior, wave-packet opening.

1. Introdução

O tratamento quântico do gás perfeito pela mecânica estatística permitiu ultrapassar a limitação clássica na contagem de estados, fornecendo com Sakur-Tetrode [1] valor absoluto de sua entropia. Nele, as moléculas do gás são consideradas como ocupando o volume do recipiente - em geral, uma caixa de potencial -, de acordo com os estados e as energias quânticas para partículas isoladas. Isto, sem dúvida nenhuma, é uma abordagem apropriada em densidades 'baixas' dos gases, mas ocorre que estes continuam perfeitos, ou quase, mesmo quando o livre caminho médio entre choques - linguagem já afastado do dicionário quântico -, se torna tão pequeno como 10^{-5} cm, como se tem nas condições normais de pressão e temperatura (CNPT) [2].

Pretendemos aqui quantificar as aspás colocadas acima em 'baixas', estabelecendo um limite para a transição entre a literal adequacidade do tratamento quântico e o da abordagem clássica de partículas pontuais newtonianas. Para isto, invocaremos uma propriedade física dos objetos em questão, isto é, das moléculas no interior da 'caixa'. Uma propriedade fundamental dos objetos quânticos localizados é o da 'abertura do pacote', pelo qual progressivamente se deslocalizam [3]. Por outro lado, é intuitivo que eventuais choques com moléculas congêneres, ao contrário, constituem-se em atos de localização. Nesta linha de raciocínio, aquele limite buscado acontecerá quando o tempo de deslocalização das dimensões moleculares àquelas do recipiente

se tornar menor do que o tempo entre os choques, favorecendo uma descrição deslocalizada, isto é, quântica. É o que fazemos a seguir.

2. Cálculo do limite clássico-quântico

A densidade de probabilidade $\rho(x, t)$ de uma partícula de massa m , de 'tamanho' inicial Δx , é, no tempo t , sendo \hbar a constante de Planck 'racionalizada', dada por [3]:

$$\rho(x, t) = \left\{ 2\pi \left[\Delta x^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \Delta x^2} \right]^{-1/2} \times \exp \left[\frac{-x^2}{2(\Delta x^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \Delta x^2})} \right] \right\}, \quad (1)$$

resultado que se mantém válido em três dimensões, com $x \rightarrow r$, coordenada esférica, e $\Delta x \rightarrow r_0$, raio localizado [4]. Obtem-se então que o tempo de deslocalização t_d , da dimensão molecular, r_0 , à dimensão macroscópica L , é:

$$t_d = \frac{2mr_0L}{\hbar}. \quad (2)$$

Por outro lado, o tempo médio entre choques, t_c , pode ser estimado de λ , livre caminho médio, e da velocidade térmica v_t como [2]:

$$t_c = \frac{\lambda}{v_t}, \quad (3)$$

¹E-mail: guilherm@if.sc.usp.br.

sendo que λ pode ser expresso em função da densidade molecular, ou seja, do número de moléculas por unidade de volume N , e da seção de choque σ :

$$\lambda = \frac{1}{N\sigma}, \quad (4)$$

de maneira que t_c resulta:

$$t_c = \frac{1}{N\sigma v_t}. \quad (5)$$

t_d , Eq. (1), e t_c , Eq. (4), tornam-se da mesma ordem para N igual a densidade molecular N_L :

$$N_L = \frac{\hbar}{2m\sigma r_0 L v_t}. \quad (6)$$

Vamos tomar a dimensão macroscópica L como 10 cm e o gás como o ar com valores típicos de $m \simeq 29 \times 1,67 \times 10^{-24}$ g e $r_0 = 5 \times 10^{-8}$ cm. tem-se $\hbar = 1,05 \times 10^{-27}$ erg-s, $v_t \simeq 5 \times 10^4$ cm/s, $\sigma = 9 \times r_0^2 \simeq 4 \times 10^{-15}$ cm² e então resulta:

$$N_L = 10^{11} \text{ moléculas/cm}^3. \quad (7)$$

Esta densidade é cerca de 10^7 ordens de grandeza menor do que a densidade CNPT, que é de 3×10^{19} /cm³.

3. Considerações finais

Sabemos que a descrição clássica newtoniana é boa nas CNTP e não haveria razão, aparentemente, de deixar de ser para densidades menores, a não ser que um fenômeno físico impusesse a mudança de descrição. Estamos propondo que esses fenômeno físico é o da 'abertura do pacote', típico da descrição quântica dos fenômenos, que impor-se-ia em densidades menores.

Referências

- [1] F. Reif, *Fundamentals of Statistical Mechanics and Thermal Physics* (McGraw-Hill Books, New York, 1965), cap. 7.
- [2] F.W. Sears, *An Introduction to Thermodynamics, the Kinetic Theory of Gases and Statistical Mechanics* (Addison-Wesley, Massachusetts, 1956), cap. 14-15.
- [3] L. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill Books, New York, 1959), cap. 4.
- [4] J. Synge, *Found. Phys.* **2**, 35 (1972).