

Explorando sistemas hamiltonianos: Estudo analítico

(Exploring hamiltonian systems: Analytical study)

G.A. Monerat¹, E.V. Corrêa Silva¹, G. Oliveira-Neto¹, A.R.P. de Assumpção¹ e A.R.R. Papa^{1,2}

¹*Departamento de Matemática e Computação, Faculdade de Tecnologia,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Resende, RJ, Brasil*

²*Observatório Nacional, Coordenação de Geofísica, Rio de Janeiro, RJ, Brasil*
Recebido em 13/10/2005; Revisado em 18/3/2006; Aceito em 4/4/2006

Um pêndulo duplo submetido a torques externos é usado para introduzir alguns fundamentos da teoria de Sistemas Dinâmicos para os cursos de graduação em Física, logo após o aluno ter cursado a disciplina de mecânica analítica. Este sistema mostra-se um bom exemplo para a introdução de tais técnicas. As equações de movimento de Hamilton indicam a existência de soluções estacionárias (pontos de equilíbrio) no espaço de fase do modelo. A identificação da natureza desses pontos de equilíbrio permite a descrição da dinâmica do sistema na vizinhança linear destes. Além disso, os resultados obtidos na vizinhança linear de um ponto de equilíbrio não são alterados pela introdução de torques externos constantes não-nulos. Neste trabalho enfatiza-se a análise da vizinhança linear dos pontos de equilíbrio.

Palavras-chave: sistemas hamiltonianos, teoria de sistemas dinâmicos, caos.

A double pendulum submitted to external torques is employed to introduce some basic fundamentals of dynamical systems theory to physics undergraduate courses, soon after the student takes the analytical mechanics discipline. This system is a good example for the introduction of such techniques. Hamilton's equations of motion indicate the existence of stationary solutions (equilibrium points) in the phase space of the model. The identification of the nature of these points allows the description of the system dynamics around their linear neighborhood. Moreover, qualitative results obtained in the linear neighborhood of a fixed point are not changed by the introduction of non-vanishing constant external torques. This work emphasizes the analysis of the linear neighborhood of the equilibrium points.

Keywords: hamiltonian systems, dynamical systems theory, chaos.

1. Introdução

No decorrer dos cursos de graduação em Física, o estudante de bacharelado se depara com um grande número de teorias destinadas a explicar diferentes fenômenos, muitos dos quais descritos por sistemas de equações diferenciais. Para isso torna-se necessário o uso de diversos métodos matemáticos que possibilitem solucionar os problemas oriundos da complexidade destas equações. Além disso, existem determinados sistemas que apresentam uma grande sensibilidade a mudança nas condições iniciais. Em outras palavras, uma pequena mudança no estado inicial do sistema, leva a diferentes configurações após um certo intervalo de tempo, conforme observado primeiramente [1] por Poincaré em 1903. Dizemos então que tais sistemas são caóticos. Como exemplos de sistemas com tal comportamento podemos citar: sistemas de três

corpos; osciladores bidimensionais forçados; modelos cosmológicos de Friedmann-Robertson-Walker; pêndulo com mola; pêndulo duplo no plano e muitos outros. A representação de muitos destes sistemas pode ser feita através do formalismo Hamiltoniano. E por esse motivo daremos ênfase aos sistemas Hamiltonianos.

Para sistemas que apresentam esse tipo de comportamento, o uso de técnicas de sistemas dinâmicos [2, 3] na descrição do comportamento regular/caótico do sistema tem se mostrado de grande utilidade. Infelizmente, as Técnicas de Sistemas Dinâmicos, na maioria dos cursos de graduação em física não são ensinadas, apesar do grande número de aplicações em Física [4, 5], assim como nas áreas de Biologia [6], Economia [7], Química [8, 9] etc.

Um primeiro passo no estudo de sistemas hamiltonianos com comportamento caótico consiste no uso de algumas das técnicas de sistemas dinâmicos que po-

¹E-mail: monerat@uerj.br.

dem ser introduzidas através de exemplos já conhecidos pelos discentes de graduação em física que tenham cursado a disciplina de mecânica analítica [10, 11]. A introdução de uma disciplina com cinco créditos (76 horas/aula) de Tópicos Especiais, cujos pré-requisitos sejam mecânica analítica e equações diferenciais, possibilitará a introdução das técnicas de sistemas dinâmicos aos discentes de graduação em Física.

Sistemas formados por pêndulos representam excelentes laboratórios para o estudo do comportamento caótico. Podemos citar alguns exemplos na literatura recente. Na Ref. [12], o pêndulo elástico é analisado segundo quatro indicadores de caoticidade: seções de Poincaré, expoentes de Lyapunov, função de correlação e espectro de potência do sistema. Na Ref. [13], alguns aspectos da linguagem de sistemas dinâmicos são apresentados e exemplificados por um pêndulo simples sob amortecimento e/ou forças externas oscilatórias. Encontram-se disponíveis online discussões do comportamento caótico do pêndulo duplo, utilizando-se ferramentas desenvolvidas em linguagem Java [14, 15], Maple [16] e Mathematica [17] (neste último, implementa-se um método de formas normais). Recentemente, foi feito um pequeno ensaio [18] para o estudo analítico desse sistema para determinação de valores particulares de suas massas e de seus comprimentos.

O estudo do comportamento da dinâmica caótica do pêndulo duplo será dividido em duas partes: (i) estudo analítico e (ii) análise numérica, onde confirmaremos os resultados obtidos no estudo analítico e confirmaremos que tal sistema é caótico.

Na primeira parte deste trabalho, consideraremos um sistema formado por um pêndulo duplo submetido a torques externos e o estudo feito para quaisquer valores dos parâmetros do sistema. Tal sistema pode ser descrito por uma função de Hamilton com dois graus de liberdade apenas. Apesar disso tal sistema apresenta um comportamento caótico, sendo um excelente exemplo para o estudo exploratório de sistemas hamiltonianos.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2.1 apresentamos uma rápida discussão sobre o pêndulo simples, mais familiar ao aluno de graduação em Física, e em seguida discutimos o pêndulo duplo. Na seção 2.2 um modelo matemático em termos de uma função de Hamilton de dois graus de liberdade é apresentado para a descrição de um sistema formado por um pêndulo duplo submetido a torque externos constantes, e sua dinâmica descrita pelas equações de Hamilton, que neste caso constituem um sistema autônomo de quatro equações diferenciais ordinárias não-lineares. Na seção 3, analisamos o caso de torques nulos e ob-

servamos a existência de quatro pontos de equilíbrio no espaço de fase, cuja natureza são: dois centro-selas, um puro centro e um pura sela. Na seção 4, a presença de duas variedades invariantes equivalentes são observadas. Estas por sua vez estão associadas cada uma delas a um centro-sela. A dinâmica sobre cada uma dessas variedades é descrita por um sistema de duas equações diferenciais totalmente integrável.

Na seção 5, obtemos uma transformação canônica e reescrevemos a função de Hamilton na chamada Forma Normal. Nessas novas variáveis observamos que nossos resultados na vizinhança linear de um centro-sela estão de acordo com o teorema de Moser. Na seção 6 estudamos a topologia do espaço de fase na vizinhança linear de cada um dos pontos de equilíbrio e na seção 7 repetimos nossa análise para o caso em que o pêndulo duplo esteja submetido a torques externos constantes. Finalmente, apresentamos nossas conclusões e comentários na seção 8.

2. O modelo

Para introduzir a noção de caos clássico e alguns conceitos fundamentais da teoria de sistemas dinâmicos necessários ao estudo do comportamento regular/irregular do movimento em sistemas hamiltonianos, escolhemos como exemplo um pêndulo duplo submetido a torques externos (*i.e.*, torques de origem não gravitacional), conforme mostrado na Fig. 1b. Porém, iniciaremos nossa análise pelo pêndulo simples (Fig. 1a), mais familiar ao aluno de graduação.

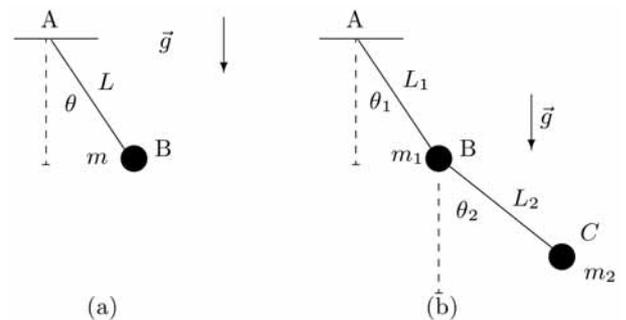


Figura 1 - Representação do (a) pêndulo simples e (b) pêndulo duplo, submetido a torques externos.

Estes pêndulos podem ser utilizados como modelos simplificados de braços robóticos planares de um e dois segmentos, com motores aplicando torques no ponto A (no caso do pêndulo simples) e nos pontos A e B (no caso do pêndulo duplo).

2.1. O pêndulo simples

Um pêndulo simples submetido à aceleração gravitacional \mathbf{g} e ao torque externo constante T pode ser descrito

por uma função de Hamilton na forma:

$$H = \frac{1}{2mL^2} p_\theta^2 - mgL \cos \theta - \theta T. \quad (1)$$

A dinâmica clássica é fornecida pelas equações de Hamilton [10]:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{1}{mL^2} p_\theta \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgL \sin \theta + T, \end{cases} \quad (2)$$

em que o ponto indica derivação ordinária em relação ao tempo t .

Examinemos primeiramente o caso em que $T = 0$. O sistema descrito por duas equações em (2) não depende explicitamente do tempo, e por isso é denominado *autônomo* [19]. Repare que o sistema em questão possui apenas um grau de liberdade; portanto, é um sistema integrável². Isto pode ser mostrado combinando as equações em (2) para obtermos:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0, \quad (3)$$

que possui solução na forma de funções elípticas de Jacobi [20]. As funções elípticas de Jacobi podem ser consideradas como generalizações das funções trigonométricas seno e co-seno. Esse resultado pode ser generalizado da seguinte maneira: *todo sistema autônomo de um grau de liberdade é completamente integrável*.

O ponto de partida de nossa análise será a busca de soluções estacionárias no espaço de fase do modelo, representadas pelos chamados pontos de equilíbrio ou pontos críticos [19]. Sua importância está na estrutura que impõem às órbitas (ou trajetórias) no espaço de fase, em sua vizinhança linear. Estes pontos de equilíbrio constituem pontos no espaço de fase descritos pelos valores de (θ, p_θ) para os quais o $(\dot{\theta}, \dot{p}_\theta)$ se anulam nas equações de Hamilton. Os valores de energia associados a estes pontos são denominados *energias críticas*, facilmente obtidas pela substituição dos valores das coordenadas dos pontos de equilíbrio na função de Hamilton do sistema.

No caso do pêndulo simples temos dois pontos de equilíbrio descrito pelos vetores coluna:

$$\bar{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

em que a primeira e segunda linha de cada vetor correspondem às coordenadas θ e p_θ , respectivamente. As energias críticas correspondentes são $\mathcal{E}_1 = -mgL$ e

$\mathcal{E}_2 = mgL$. O ponto \bar{X}_1 corresponde à configuração de equilíbrio (repouso) estável, no qual o pêndulo se encontra na posição vertical para baixo; o ponto \bar{X}_2 , à configuração de equilíbrio instável com o pêndulo na posição vertical para cima.

A natureza de um ponto de equilíbrio é determinada pela linearização do sistema de Hamilton (2) em torno deste ponto. Para isso, expandimos o lado direito de cada uma destas equações em série de Taylor nas variáveis (θ, p_θ) , em torno das coordenadas do ponto de equilíbrio, desprezando os termos superiores aos de primeira ordem. Em cada caso, o sistema toma a forma matricial:

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = J_i (X_i(t) - \bar{X}_i), \quad (5)$$

em que o índice $i = 1, 2$ rotula os pontos de equilíbrio, e J_i é a *matriz jacobiana* [2] associada ao i -ésimo ponto de equilíbrio. Observe que as funções $X_i(t)$ representam *deslocamentos* do sistema *em relação ao* ponto de equilíbrio \bar{X}_i . No caso em questão, as matrizes J_i têm a forma:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{mL^2} \\ -mgL & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{mL^2} \\ mgL & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

A solução geral do sistema linearizado (5) em torno de um ponto de equilíbrio é uma superposição (combinação linear) das soluções linearmente independentes. Neste caso, duas soluções para cada ponto de equilíbrio,

$$X_i(t) = \sum_{m=1}^2 c_m^{(i)} e^{\lambda_m^{(i)} t} A_m^{(i)}, \quad (7)$$

em que os $A_m^{(i)}$ são os autovetores associados aos autovalores $\lambda_m^{(i)}$ da matriz J_i , e os coeficientes $c_m^{(i)}$ são constantes de integração que dependem das condições iniciais escolhidas. A natureza dos pontos de equilíbrio é determinada pelos autovalores da matriz jacobiana. Estes são:

$$\lambda_{1,2}^{(1)} = \pm iw_0; \quad \lambda_{1,2}^{(2)} = \pm w_0, \quad (8)$$

em que $w_0 = \sqrt{g/L}$ é a frequência natural do pêndulo simples. De acordo com (7) e (8) vemos que as soluções em torno de \bar{X}_1 serão expressas em termos de funções trigonométricas (por serem os autovalores puramente imaginários, e conjugados complexos), o que indica que tal ponto de equilíbrio é estável conforme já mencionado, e que na vizinhança linear deste, as órbitas (trajetórias) no espaço de fase são órbitas periódicas. Tal ponto de equilíbrio é denominado *centro* [2]. Por outro lado, as soluções do sistema na vizinhança linear de \bar{X}_2 é descrita por funções hiperbólicas (por serem os

²A condição para que um sistema com N graus de liberdade seja completamente integrável é que este contenha N constantes de movimento em involução; em outras palavras, que sejam independentes umas das outras [19].

autovalores reais e de sinais trocados). Este ponto de equilíbrio é denominado *ponto de sela hiperbólico* [2]. Neste caso, as órbitas no espaço de fase aproximam-se do ponto de equilíbrio segundo uma das direções (correspondendo à direção do autovetor associado ao autovalor real negativo) e afastam-se pela outra (correspondendo à direção do autovetor associado ao autovalor real positivo). O resultado disto é que o ponto de sela hiperbólico é um ponto de equilíbrio *instável*, pois a resposta do sistema a uma pequena perturbação genérica nas condições iniciais em torno desse ponto cresce quando $t \rightarrow \infty$. Caso a resposta do sistema à pequena perturbação permanecer pequena para $t \rightarrow \infty$, o ponto de equilíbrio é dito *estável*.

Com base nessa discussão, podemos ter uma boa idéia de como é o retrato de fase desse sistema. Para isso, vamos seguir o procedimento da Ref. [2]. Seja $f = \dot{\theta}$ em (3); utilizando a regra da cadeia, obtemos:

$$\dot{f} = \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = f \frac{df}{d\theta} = -\frac{g}{L} \sin\theta.$$

Integrando a expressão anterior, obtemos:

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{C + \frac{2g}{L} \cos\theta}, \quad (9)$$

em que C é uma constante de integração que está relacionada à energia do sistema. A expressão (9) fornece o retrato de fase do pêndulo simples, em que cada órbita possui um dado valor de C . Deixamos ao leitor interessado construir a partir de (9) tal retrato.

Quando introduzimos um torque externo $T \neq 0$ constante ao sistema pêndulo simples, encontramos dois pontos de equilíbrio descritos pelas coordenadas $\bar{P}_1(\theta = \arcsen(\frac{T}{mgL}), p_\theta = 0)$ e $\bar{P}_2(\theta = \arcsen(\pi - \frac{T}{mgL}), p_\theta = 0)$ com energias associadas dadas respectivamente por $\bar{\epsilon}_1 = -mgL\sqrt{1 - \frac{T^2}{m^2g^2L^2}} - \arcsen(\frac{T}{mgL})T$ e $\bar{\epsilon}_2 = mgL\sqrt{1 - \frac{T^2}{m^2g^2L^2}} - (\pi - \arcsen(\frac{T}{mgL}))T$. Como já mencionado anteriormente, há uma matriz jacobiana associada a cada ponto de equilíbrio. Por sua vez, os autovalores associados a estas matrizes, determinam a natureza de cada ponto de equilíbrio. Neste caso, estes autovalores são:

$$\lambda^{(1)} = \pm \frac{\sqrt{-L\sqrt{\frac{m^2g^2L^2 - T^2}{m^2g^2L^2}}}}{L}$$

$$\lambda^{(2)} = \pm \frac{\sqrt{L\sqrt{\frac{m^2g^2L^2 - T^2}{m^2g^2L^2}}}}{L}. \quad (10)$$

Aqui os autovalores $\lambda^{(1)}$ e $\lambda^{(2)}$ estão associados respectivamente aos pontos de equilíbrio \bar{P}_1 e \bar{P}_2 . Conforme podemos ver em (10), para o caso em que o torque externo assuma valores $-mgL < T < mgL$ temos que $\lambda^{(1)}$

é um imaginário puro, logo trata-se de um centro indicando que tal ponto de equilíbrio é estável. Enquanto que $\lambda^{(2)}$ corresponde a uma sela (autovalores reais de sinais opostos), indicando que tal ponto de equilíbrio é instável. Se o torque externo assumir valores no intervalo $-mgL > T > mgL$ o ponto \bar{P}_1 é um ponto de sela e o ponto \bar{P}_2 um centro. Observamos com isso que a introdução de um torque externo constante não alterou o número de pontos de equilíbrio e nem a natureza destes. Em outras palavras, a dinâmica na vizinhança linear de cada ponto de equilíbrio não é afetada devido a presença de um torque externo constante.

Repare ainda que quando o torque externo assume os valores $T = \pm mgL$, os autovalores em (10) se anulam e a análise linear falha. Em outras palavras, a matriz jacobiana do sistema linearizado numa vizinhança linear de cada ponto de equilíbrio apresenta todos os autovalores nulos. Tais pontos de equilíbrio são denominados *degenerados*. Neste caso um novo procedimento deve ser considerado para que a classificação destes pontos seja obtida. Para o leitor interessado nos o remetemos à literatura [25].

2.2. O pêndulo duplo

O sistema representado pela Fig. 1b pode ser descrito por uma lagrangiana [10] com dois graus de liberdade, na forma:

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2} L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g L_1 \cos\theta_1 + m_2 g L_2 \cos\theta_2 + \theta_1 T_1(t) + \theta_2 T_2(t),$$

em que θ_1 e θ_2 representam as coordenadas generalizadas, L_1 e L_2 os comprimentos dos segmentos do pêndulo, m_1 e m_2 as massas nas extremidades de cada segmento, $T_1(t)$ e $T_2(t)$ os torques aplicados nos pontos A e B (vide Fig. 1b) e g é o módulo da aceleração gravitacional. A função de Hamilton para esse sistema pode ser facilmente obtida (um bom exercício, que deixamos a cargo do leitor interessado),

$$H = \frac{1}{(m_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2))^2} \left\{ \frac{p_1^2}{2L_1^2} + \frac{(m_1 + m_2) p_2^2}{2m_2 L_2^2} - \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) p_2 p_1}{L_1 L_2} \right\} - (m_1 + m_2) g L_1 \cos(\theta_1) - m_2 g L_2 \cos(\theta_2) - \theta_1 T_1(t) - \theta_2 T_2(t), \quad (11)$$

em que p_1 e p_2 são os momentos canonicamente conjugados às variáveis θ_1 e θ_2 , respectivamente. Faremos nossa análise sobre o espaço de fase do modelo, com pontos da forma:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ p_1 \\ \theta_2 \\ p_2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

As órbitas no espaço de fase constituem as soluções do sistema dinâmico descrito pelas equações de Hamilton

[11]. Neste caso, temos um sistema de quatro equações não-lineares:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{L_1^2 (m_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)^2)} - \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)p_2}{L_1 L_2 (m_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)^2)}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = & \frac{m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) p_1^2}{L_1^2 (m_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)^2)^2} + \frac{(m_1 + m_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) p_2^2}{L_2^2 (m_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)^2)^2} - T_1(t) + \\ & - \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2) p_1 p_2}{L_1 L_2 (m_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)^2)} - \frac{2m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) p_1 p_2}{L_1 L_2 (m_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)^2)^2} - (m_1 + m_2)g L_1 \sin(\theta_1); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = -\frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)p_1}{L_1 L_2 (m_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)^2)} + \frac{(m_1 + m_2)p_2}{m_2 L_2^2 (m_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)^2)}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} = & -\frac{m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) p_1^2}{L_1^2 (m_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)^2)^2} + \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2) p_1 p_2}{L_1 L_2 (m_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)^2)} - T_2(t) + \\ & + \frac{2m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)^2 p_1 p_2}{L_1 L_2 (m_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)^2)^2} - \frac{(m_1 + m_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) p_2^2}{L_2^2 (m_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)^2)^2} + m_2 g L_2 \sin(\theta_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Este sistema é não-integrável. Por questão de simplicidade, vamos considerar que os torques externos T_1 e T_2 sejam constantes; o sistema então torna-se autônomo, ou seja, suas equações não dependem explicitamente do tempo.

Repetindo os passos realizados no caso do pêndulo simples, iniciaremos nossa análise pela busca de soluções estacionárias no espaço de fase do modelo, representadas pelos pontos de equilíbrio. Como já mencionado, estes pontos de equilíbrio constituem pontos no espaço de fase descritos pelos valores de $(\theta_1, p_1, \theta_2, p_2)$ para os quais todas as derivadas temporais $(\dot{\theta}_1, \dot{p}_1, \dot{\theta}_2, \dot{p}_2)$ se anulam. Analisaremos dois casos: (i) torques nulos $T_1 = 0$ e $T_2 = 0$; e (ii) torques constantes não-nulos $T_1 = \beta_1$ e $T_2 = \beta_2$.

3. O caso de torques nulos

No caso de torques externos nulos, observamos a existência de quatro pontos de equilíbrio,

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_4 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

cujas energias são, respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned} E_1 &= -(m_1 + m_2)g L_1 - m_2 g L_2, \\ E_2 &= -(m_1 + m_2)g L_1 + m_2 g L_2, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} E_3 &= (m_1 + m_2)g L_1 - m_2 g L_2, \\ E_4 &= (m_1 + m_2)g L_1 + m_2 g L_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Como já mencionado, esses pontos determinam o comportamento das trajetórias no espaço de fase na vizinhança linear de cada um deles. Fazendo uso do processo de linearização, vamos determinar a natureza de cada ponto de equilíbrio. Após a linearização do sistema formado pelas equações de Hamilton, em torno de um dado ponto de equilíbrio, este fica na forma (5), com $\tilde{X}_i \equiv \mathcal{P}_i$. O índice $i = 1, 2, 3, 4$ rotula os pontos de equilíbrio, e J_i corresponde à matriz jacobiana do sistema em relação ao i -ésimo ponto de equilíbrio,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m_1 L_1^2} & 0 & -\frac{1}{m_1 L_1 L_2} \\ -(m_1 + m_2)g L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_1 L_1 L_2} & 0 & \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 L_2^2} \\ 0 & 0 & -m_2 g L_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m_1 L_1^2} & 0 & \frac{1}{m_1 L_1 L_2} \\ -(m_1 + m_2)gL_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_1 L_1 L_2} & 0 & \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 L_2^2} \\ 0 & 0 & m_2 g L_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m_1 L_1^2} & 0 & \frac{1}{m_1 L_1 L_2} \\ (m_1 + m_2)gL_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_1 L_1 L_2} & 0 & \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 L_2^2} \\ 0 & 0 & -m_2 g L_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m_1 L_1^2} & 0 & -\frac{1}{m_1 L_1 L_2} \\ (m_1 + m_2)gL_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_1 L_1 L_2} & 0 & \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 L_2^2} \\ 0 & 0 & m_2 g L_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

A solução geral do sistema linearizado (5) é dada por (7). Neste caso, há quatro soluções independentes. Como no caso do pêndulo simples, a natureza dos pontos de equilíbrio é determinada pelos autovalores da matriz jacobiana. Estes são:

$$\lambda_{1,2}^{(1)} = \pm \frac{\omega_1}{2m_1 L_2} \sqrt{2m_1 L_2 \left[-(L_1 + L_2)(m_1 + m_2) + \sqrt{(m_1 + m_2)(m_1(L_1 - L_2)^2 + m_2(L_1 + L_2)^2)} \right]};$$

$$\lambda_{3,4}^{(1)} = \pm \frac{i\omega_1}{2m_1 L_2} \sqrt{2m_1 L_2 \left[(L_1 + L_2)(m_1 + m_2) + \sqrt{(m_1 + m_2)[m_1(L_1 - L_2)^2 + m_2(L_1 + L_2)^2]} \right]};$$

$$\lambda_{1,2}^{(2)} = \pm \frac{\omega_1}{2m_1 L_2} \sqrt{2m_1 L_2 \left[(L_1 - L_2)(m_1 + m_2) + \sqrt{(m_1 + m_2)[m_1(L_1 + L_2)^2 + m_2(L_1 - L_2)^2]} \right]};$$

$$\lambda_{3,4}^{(2)} = \frac{\omega_1}{2m_1 L_2} \sqrt{2m_1 L_2 \left[(L_1 - L_2)(m_1 + m_2) - \sqrt{(m_1 + m_2)[m_1(L_1 + L_2)^2 + m_2(L_1 - L_2)^2]} \right]};$$

$$\lambda_{1,2}^{(3)} = \pm \frac{\omega_1}{2m_1 L_2} \sqrt{2m_1 L_2 \left[-(L_1 - L_2)(m_1 + m_2) + \sqrt{(m_1 + m_2)(m_1(L_1 + L_2)^2 + m_2(L_1 - L_2)^2)} \right]};$$

$$\lambda_{3,4}^{(3)} = \pm \frac{\omega_1}{2m_1 L_2} \sqrt{2m_1 L_2 \left[-(L_1 - L_2)(m_1 + m_2) - \sqrt{(m_1 + m_2)(m_1(L_1 + L_2)^2 + m_2(L_1 - L_2)^2)} \right]};$$

$$\lambda_{1,2}^{(4)} = \pm \frac{\omega_1}{2m_1 L_2} \sqrt{2m_1 L_2 \left[(L_1 + L_2)(m_1 + m_2) + \sqrt{(m_1 + m_2)(m_1(L_1 - L_2)^2 + m_2(L_1 + L_2)^2)} \right]};$$

$$\lambda_{3,4}^{(4)} = \pm \frac{\omega_1}{2m_1 L_2} \sqrt{2m_1 L_2 \left[(L_1 + L_2)(m_1 + m_2) - \sqrt{(m_1 + m_2)[m_1(L_1 - L_2)^2 + m_2(L_1 + L_2)^2]} \right]},$$

em que $\omega_1 = \sqrt{g/L_1}$ é a frequência de um pêndulo simples de comprimento L_1 . A análise do sinal dentro da raiz nos fornecerá a natureza de tais pontos de equilíbrio. Consideremos $\lambda_{1,2}^{(1)}$ e chamaremos os elementos dentro da raiz de $\Omega_{1,2}^{(1)}$:

$$\Omega_{1,2}^{(1)} = -\sqrt{[(L_1 + L_2)(m_1 + m_2)]^2 + \sqrt{(m_1 + m_2)[m_1(L_1 - L_2)^2 + m_2(L_1 + L_2)^2]}}. \quad (24)$$

Colocando L_1 e m_1 em evidência em (24) e definindo $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ e $\alpha = \frac{L_2}{L_1}$, encontramos:

$$\Omega_{1,2}^{(1)} = m_1 L_1 \left\{ -\sqrt{[(1 + \alpha)^2(1 + \mu)^2] + \sqrt{(1 + \mu)[(1 - \alpha)^2 + \mu(1 + \alpha)^2]}} \right\}. \quad (25)$$

De acordo com (25), vemos que $\Omega_{1,2}^{(1)} < 0$, pois o valor dentro da primeira raiz é sempre maior que o valor fornecido pelos elementos dentro da segunda raiz. Logo $\lambda_{1,2}^{(1)}$ é imaginário. Repetindo essa análise para os demais autovalores, podemos classificar [2, 4, 5] todos os pontos de equilíbrio. Assim, \mathcal{P}_1 é um puro centro, pois todos os autovalores da matriz J_1 são da forma $\lambda_{1,2} = \pm ia$ e $\lambda_{3,4} = \pm ib$. Já os pontos \mathcal{P}_2 e \mathcal{P}_3 são centros-sela, pois seus autovalores de J_2 e J_3 são da forma $\lambda_{1,2} = \pm a$ e $\lambda_{3,4} = \pm ib$. Finalmente, o ponto \mathcal{P}_4 é um pura sela, pois todos os autovalores de J_4 são reais e da forma $\lambda_{1,2} = \pm a$ e $\lambda_{3,4} = \pm b$, em que a e b são reais positivos.

À exceção do puro centro, estes pontos de equilíbrio são instáveis. Mais adiante analisaremos a estrutura das órbitas (topologia) no espaço de fase na vizinhança linear de cada um dos pontos de equilíbrio, e veremos que o centro-sela, para uma escolha muito particular das condições iniciais, pode apresentar um equilíbrio estável.

4. A variedade invariante

Uma importante característica do pêndulo duplo sob torques nulos é a existência do que se denomina *variedade invariante* no espaço de fase.

Podemos conceituar uma variedade (em inglês, *manifold* [21]) k -dimensional M como sendo um subconjunto de pontos do espaço de fase em que cada ponto da variedade é representável univocamente por k parâmetros reais, tal que variações infinitesimais destes parâmetros correspondem a deslocamentos infinitesimais sobre a variedade, e vice-versa³. O conceito de variedade generaliza o de curvas *suaves* descritas por um parâmetro (variedades uni-dimensionais) imersas em um espaço bi- ou tri-dimensional, e de superfícies suaves descritas por dois parâmetros (variedades bi-dimensionais) imersas em um espaço tri-dimensional. Uma linha poligonal e a superfície de um cubo *não* são exemplos de variedades, devido aos seus vértices e arestas.

Se existe no espaço de fase uma variedade k -dimensional M para a qual o sistema, dada uma condição inicial pertencente a M , permaneça em M para todo instante de tempo t posterior, então esta variedade é dita *invariante*.

³Seja $S^k \subset R^n$ o subconjunto das n -uplas reais que possuem as últimas $(n - k)$ componentes nulas, ou seja, $S^k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in R^n \mid \text{se } l > k \text{ então } x_l = 0\} = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in R^n\}$. Um *difeomorfismo* é uma função inversível $h : U \rightarrow V$, em que U e V são subconjuntos abertos de R^n , tal que tanto h quanto sua inversa $h^{-1} : V \rightarrow U$ são diferenciáveis. Uma *variedade* M de dimensão k (em que $0 \leq k \leq n$) é um subconjunto de R^n tal que, para todo ponto $x \in M$ existe um difeomorfismo h , com domínio em alguma vizinhança aberta U de x e contra-domínio em alguma vizinhança V de $y = h(x)$, tal que todos os pontos de U também pertencem a M são mapeados em pontos de V também pertencentes a S^k ; ou seja, se $x \in (U \cap M)$ então $h(x) \in (V \cap S^k)$ (vide Ref. [21]). Assim, cada elemento da variedade M (pelo menos aqueles que também pertencem a U) é representado por k parâmetros reais, e variações infinitesimais nestes parâmetros traduzem-se em deslocamentos infinitesimais sobre M , e vice-versa.

Em nosso caso, encontramos duas variedades invariantes equivalentes (*i.e.*, de mesma estrutura), cada uma delas associadas a um ponto de equilíbrio centro-sela. Estas variedades são definidas como:

$$\mathcal{M}_1 : \left(\theta_2 = 0, p_2 = \frac{m_2 L_2 \cos(\theta_1) p_1}{(m_1 + m_2) L_1} \right) \quad (26)$$

$$\mathcal{M}_2 : \left(\theta_2 = \pi, p_2 = \frac{m_2 L_2 \cos(\theta_1) p_1}{(m_1 + m_2) L_1} \right). \quad (27)$$

Ambas as variedades são equivalentes, de modo que focalizaremos nossa discussão na variedade \mathcal{M}_1 , sendo os resultados análogos para \mathcal{M}_2 .

Em um sistema hamiltoniano de N graus de liberdade, sempre que for possível obter um par de variáveis canonicamente conjugadas (q_i, p_i) tal que $\dot{q}_i = 0$ e $\dot{p}_i = 0$, então existirá uma variedade invariante associada. Sobre esta variedade, as coordenadas q_i e p_i (que são constantes no tempo) podem ser escritas como função das demais coordenadas, ou seja, obtemos duas relações de vínculo a serem satisfeitas pelas demais coordenadas. Isto nos permite reduzir o número de graus de liberdade do sistema de N para $N - 1$. E pelo fato de $\dot{q}_i = 0$ e $\dot{p}_i = 0$ para todo instante de tempo t , o sistema, uma vez sobre a variedade invariante, sempre estará sobre ela.

A dinâmica sobre a variedade \mathcal{M}_1 é governada por um sistema bidimensional autônomo de um grau de liberdade,

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{(m_1 + m_2) L_1} \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -(m_1 + m_2) g L_1 \sin(\theta_1), \end{cases} \quad (28)$$

e, como tal, é completamente integrável.

O comportamento das órbitas sobre a variedade invariante \mathcal{M}_1 é mostrada na Fig. 2, para amplitudes arbitrárias.

Na Fig. 2, cada órbita possui energia total definida. Repare que o retrato de fase da variedade \mathcal{M}_1 é equivalente ao retrato de fase de um pêndulo simples [2], obtido a partir de (9). O ponto de equilíbrio do tipo centro-sela encontra-se sobre a variedade \mathcal{M}_1 nas coordenadas $(\theta_1 = \pi, p_1 = 0)$, correspondendo ao caso em que as junções AB do pêndulo duplo permanecem na posição vertical (para baixo e para cima, respectivamente) e somente a junção BC está livre para se mover.

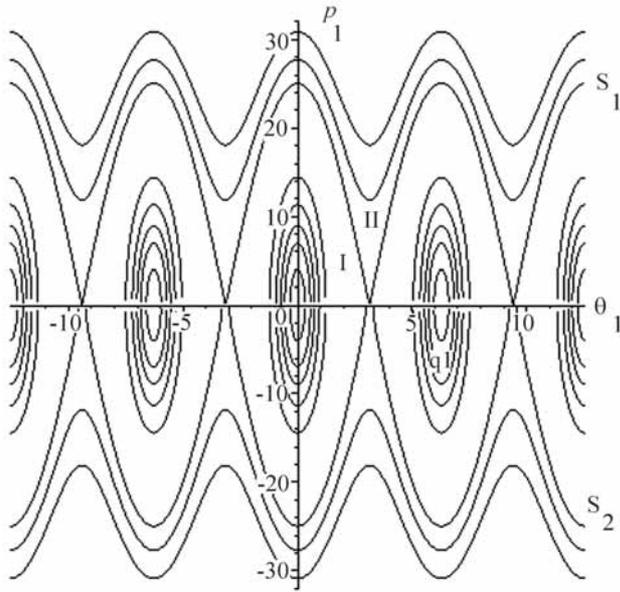


Figura 2 - Retrato de fase da variedade invariante \mathcal{M}_1 . As curvas S correspondem às separatrizes e possuem a mesma energia do ponto de equilíbrio centro-sela descrito por P_2 .

As curvas S_1 e S_2 na Fig. 2 separam quatro classes distintas de soluções, e por isso recebem o nome de *separatrizes*. Estas curvas possuem energia igual à energia crítica do centro-sela. Faremos nossa análise para condições iniciais consideradas na região ($\theta_1 > 0$ e $p_1 > 0$), porém esta análise pode ser facilmente estendida para outras regiões. Então, para condições iniciais consideradas sobre as separatrizes estas se aproximam do centro-sela para instantes de tempo $t \rightarrow \pm\infty$. Para energias $E < E_{cr}$, o sistema oscila em torno de uma posição de equilíbrio (região I). Para energias $E > E_{cr}$ o sistema apresenta rotações puras (Região II).

5. O teorema de Moser

O teorema de Moser [22] estabelece que na vizinhança linear de um centro-sela, sempre é possível escolher um conjunto de variáveis canônicas nas quais a hamiltoniana do sistema pode ser separada em dois termos: um termo puramente rotacional (que chamaremos de energia de rotação E_{rot}) e um termo puramente hiperbólico (que chamaremos de energia de movimento hiperbólico E_{hyp}). Mas como obter tal conjunto de variáveis canônicas?

Esta pergunta pode ser respondida pela aplicação do método de formas normais, que consiste basicamente em aplicarmos uma expansão em série de Taylor para o campo de velocidades (cujas componentes são os lados direitos das equações de Hamilton) em torno do ponto de equilíbrio. Quando o ponto de equilíbrio é um centro-sela, a hamiltoniana pode ser escrita na forma puramente quadrática [19], também denominada *forma*

normal. Uma transformação canônica [11] do tipo:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial \theta_1}, & p_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial \theta_2}, \\ x &= \frac{\partial F_2}{\partial p_x}, & y &= \frac{\partial F_2}{\partial p_y}, \\ \tilde{H} &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \end{aligned} \quad (29)$$

em que $F_2 = F_2(\theta_1, \theta_2, p_x, p_y)$ é a função geratriz da transformação, pode ser escolhida de tal forma que os termos não diagonais sejam nulos, na vizinhança linear do centro-sela. Para o presente caso, a transformação canônica (em torno do ponto P_2) possui a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= x + y; & p_1 &= \frac{Bp_x - Ap_y}{B - A}; \\ \theta_2 &= Ax + By; & p_2 &= \frac{-p_x + p_y}{B - A}, \end{aligned} \quad (30)$$

em que a função geratriz da transformação é:

$$F_2 = \left(\frac{B\theta_1 - \theta_2}{B - A} \right) p_x + \left(\frac{\theta_2 - A\theta_1}{B - A} \right) p_y,$$

com

$$A = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + \sqrt{m_1 m_2 + m_1^2}}$$

e

$$B = \frac{m_1 + m_2 + \sqrt{m_1 m_2 + m_1^2}}{m_2}.$$

O ponto de equilíbrio centro-sela \bar{P}_2 nas novas variáveis (x, p_x, y, p_y) é dado pelas coordenadas:

$$\bar{P}_2 : \left(x = \frac{\pi}{A - B}, p_x = 0, y = \frac{-\pi}{A - B}, p_y = 0 \right). \quad (31)$$

Substituindo as transformações (30) na hamiltoniana e linearizando-a na vizinhança de \bar{P}_2 , descrito por (31), a hamiltoniana (11) toma a forma:

$$H = E_{hyp} + E_{rot} + \epsilon, \quad (32)$$

em que:

$$\begin{cases} E_{rot} = \alpha_1 p_x^2 + \sigma_1 \left(x + \frac{\delta_1}{2\sigma_1} \right)^2, \\ E_{hyp} = \alpha_2 p_y^2 - \sigma_2 \left(y - \frac{\delta_2}{2\sigma_2} \right)^2, \\ \epsilon = \frac{\delta_2^2}{4\sigma_2} - \frac{\delta_1^2}{4\sigma_1} + \gamma_1. \end{cases} \quad (33)$$

Os coeficientes α'_i s, σ'_i e δ'_i s são números positivos originados da transformação (30); além disso, $\gamma_1 < 0$. Esses coeficientes são expressos em termos dos parâmetros do sistema na forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{L_1 g}{\eta^2} (m_1 + m_2)^2 (\eta - m_2), \\ \sigma_2 = \frac{L_1 g}{m_2} (\eta - m_2)(m_1 + m_2), \\ \delta_1 = \frac{\pi L_1 g}{\eta} m_2 (m_1 + m_2), \\ \delta_2 = \pi g L_1 \eta, \\ \alpha_1 = [4L_1^2 (m_1 + m_2) (\eta - m_2)^2]^{-1} \eta^3, \end{array} \right. \quad (34)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = [4L_1^2 (m_1 + m_2) (\eta - m_2)^2]^{-1} m_2 \eta, \\ \gamma_1 = -\frac{g L_1}{2(m_1 + \sqrt{m_1(m_1 + m_2)})} \left[8m_1^4 + 14m_2 m_1^3 + 4m_1^3 m_2 \pi^2 + 8m_1^3 \sqrt{m_1(m_1 + m_2)} + \right. \\ \left. + 4m_1^2 m_2 \pi^2 \sqrt{m_1(m_1 + m_2)} + 10m_2 m_1^2 \sqrt{m_1(m_1 + m_2)} + 5m_1 m_2^2 \pi^2 \sqrt{m_1(m_1 + m_2)} + \right. \\ \left. + 3m_2^3 \pi^2 m_1 + 2m_1 m_2^2 \sqrt{m_1(m_1 + m_2)} + m_2^3 \pi^2 \sqrt{m_1(m_1 + m_2)} + 7m_2^2 \pi^2 m_1^2 + 6m_1^2 m_2^2 \right], \end{array} \right. \quad (34)$$

com $\eta = m_1 + m_2 + \sqrt{m_1(m_1 + m_2)} > 0$. Podemos concluir então que x é a variável associada a movimentos de rotação e y é a variável associada a movimentos hiperbólicos.

Como já mencionamos anteriormente, na vizinhança linear de P_2 o sistema é separável e pode ser facilmente integrável. Em termos das novas variáveis a solução para o sistema linearizado em torno do centro-sela é:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = c_1 \sin(\sqrt{\alpha_1 \sigma_1} t) + c_2 \cos(\sqrt{\alpha_1 \sigma_1} t) - \frac{\delta_1}{2\sigma_1}, \\ p_x(t) = \frac{\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{\alpha_1}} [c_1 \cos(\sqrt{\alpha_1 \sigma_1} t) - c_2 \sin(\sqrt{\alpha_1 \sigma_1} t)], \\ y(t) = c_3 e^{\sqrt{2\sigma_2 \alpha_2} t} + c_4 e^{-\sqrt{2\sigma_2 \alpha_2} t} + \frac{\delta_2}{2\sigma_2}, \\ p_y(t) = \frac{\sqrt{\sigma_2}}{2\sqrt{\alpha_2}} [c_3 e^{\sqrt{2\sigma_2 \alpha_2} t} - c_4 e^{-\sqrt{2\sigma_2 \alpha_2} t}]. \end{array} \right. \quad (35)$$

Os c_i 's são constantes de integração que dependem da escolha das condições iniciais. Repare que o resultado acima encontra-se de acordo com o teorema de Moser, mencionado anteriormente. Resultados análogos são encontrados para o outro centro-sela P_3 , e serão omitidos aqui.

6. Topologia do espaço de fase na vizinhança linear de um ponto de equilíbrio

Vamos agora analisar todas as possíveis formas de movimento na vizinhança linear de um ponto de equilíbrio. Iniciaremos pelo centro-sela⁴.

⁴Para maiores detalhes sobre a topologia na vizinhança linear do centro-sela sugerimos as Refs. [4, 24].

6.1. O centro-sela

Como vimos, a dinâmica nesta vizinhança é governada pela hamiltoniana (32). Então, existem três possibilidades: (a) $E_{rot} \neq 0$; $E_{hyp} = 0$; (b) $E_{rot} = 0$; $E_{hyp} \neq 0$ and (c) $E_{rot} \neq 0$; $E_{hyp} \neq 0$. A seguir discutiremos cada caso em separado.

(a) Para $E_{rot} \neq 0$, $E_{hyp} = 0$, existem duas possibilidades:

1. Se $(p_y = 0, y = \frac{\delta_2}{2\sigma_2})$, nós teremos órbitas periódicas instáveis τ sobre o plano (x, p_x) (vide Fig. 3), e sua projeção sobre o plano (y, p_y) é o ponto $(y = \frac{\delta_2}{2\sigma_2}, p_y = 0)$. Lembramos que essas órbitas dependem continuamente do parâmetro ϵ .
2. Se $p_y = \pm \left| y - \frac{\delta_2}{2\sigma_2} \right| \sqrt{\alpha_2 \sigma_2}$, as variedades unidimensionais V_S (estável) e V_i (instável) (veja Fig. 4) tangentes ao centro-sela são definidas. As separatrizes S são extensões não-lineares de V_S e V_i . O movimento geral é o produto direto de órbitas periódicas τ com as variedades V_S e V_i , gerando a estrutura de cilindros $(\tau \times V_S)$ (estável) e $(\tau \times V_i)$ (instável). Órbitas sobre esses cilindros aproximam-se assintoticamente das órbitas periódicas τ quando $(t \rightarrow \infty)$. Chamamos a atenção do leitor para o fato de que estes cilindros possuem a mesma energia das órbitas periódicas τ .

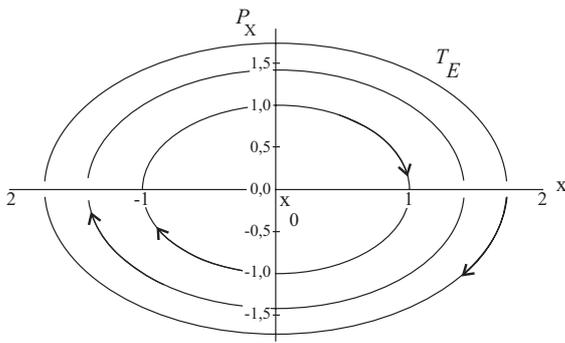


Figura 3 - Projeção das órbitas sobre o plano (x, p_x) próximo a $x_0 = -\frac{\delta_1}{2\sigma_1}$, correspondendo a órbitas periódicas instáveis na vizinhança do ponto de equilíbrio.

(b) Se $E_{rot} = 0$ e $E_{hip} \neq 0$, o movimento ocorre sobre a variedade invariante \mathcal{M}_1 . O movimento resultante do sistema consiste em órbitas hiperbólicas sobre o plano (y, p_y) , enquanto que a projeção das órbitas sobre o plano (x, p_x) é reduzida a um simples ponto.

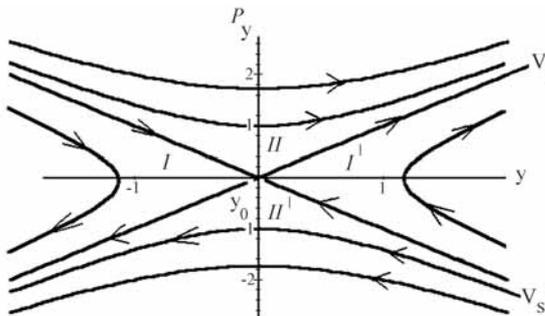


Figura 4 - Projeção das órbitas sobre o plano (y, p_y) próximo a $y_0 = \frac{\delta_2}{2\sigma_2}$, revelando uma estrutura hiperbólica na vizinhança linear do ponto de equilíbrio.

(c) Se $E_{rot} \neq 0$ e $E_{hip} \neq 0$, o movimento resultante consiste no produto direto das hipérbolas situadas nas regiões I, I', II e II' da Fig. 4, com as órbitas periódicas sobre o plano (x, p_x) na vizinhança linear do centro-sela, formando assim uma estrutura de cilindros homoclínicos⁵ no espaço de fase na vizinhança linear do centro-sela (veja Fig. 5).

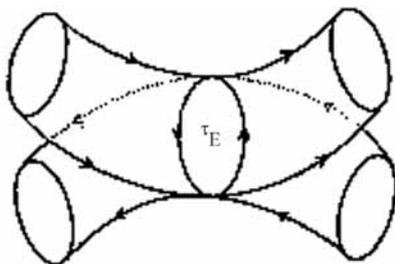


Figura 5 - Esquema da estrutura de cilindros.

⁵Uma curva é dita homoclínica quando esta parte de um ponto de equilíbrio e retorna ao mesmo, enquanto que curvas heteroclínicas são aquelas que partem de um dado ponto de equilíbrio e terminam em outro ponto de equilíbrio .

Com isso podemos dizer que, de uma maneira geral, o ponto de equilíbrio centro-sela apresenta um equilíbrio instável. Apenas para a escolha de condições iniciais muito particulares o ponto de equilíbrio centro-sela descreve um equilíbrio estável.

À medida que nos afastamos da vizinhança linear do centro-sela, os cilindros homoclínicos são distorcidos e se cruzam transversalmente. Esse fenômeno está relacionado com os chamados emaranhados homoclínicos [1] e sua existência que, como mostrou Poincaré já em 1899 [23], implica no comportamento caótico do sistema.

6.2. O puro sela

Na vizinhança do ponto de equilíbrio instável puro sela, o sistema descreve movimentos puramente hiperbólicos. Efetuando procedimento análogo àquele empregado para a centro-sela, a dinâmica na sua vizinhança linear pode ser expressa por uma hamiltoniana na forma:

$$H \cong E_{hip}(\varphi_1, p_1) - E_{hip}(\varphi_2, p_2) - \epsilon. \quad (36)$$

Neste caso, os cilindros homoclínicos nesta vizinhança são “substituídos” por dois conjuntos de variedades estáveis V_s e instáveis V_i , associados ao par de autovalores reais relacionados ao ponto de equilíbrio . Aqui, φ_1 e φ_2 representam as coordenadas canonicamente conjugadas aos momentos p_1 e p_2 .

6.3. Puro centro

O ponto de equilíbrio puro centro descreve movimentos puramente rotacionais. Em outras palavras, os autovalores da matriz jacobiana do sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio são todos imaginários puros. Na vizinhança linear de qualquer um desses pontos, a hamiltoniana que governa a dinâmica nesse regime pode ser escrita na forma:

$$H \cong E_{rot}(\varphi_1, p_1) - E_{rot}(\varphi_2, p_2) + \epsilon. \quad (37)$$

Assim como nos casos anteriores, na vizinhança linear do puro centro o sistema encontra-se desacoplado; ou seja, as equações de movimento nas variáveis φ_1 e φ_2 são independentes. Tanto φ_1 quanto φ_2 podem ser expressas em termos de funções elementares (seno e co-seno, no caso). Dizemos então que o sistema é totalmente integrável no regime linear, sendo a projeção das órbitas, tanto no plano (φ_1, p_1) quanto no plano (φ_2, p_2) descritas por órbitas periódicas estáveis. Dizemos então que o movimento encontra-se sobre toros.

Neste caso, o movimento geral será formado pelo produto direto das órbitas periódicas no plano (φ_1, p_1) com as órbitas periódicas no plano (φ_2, p_2) .

À medida que nos afastamos do regime linear, devido à não-integrabilidade observa-se a distorção desses *toros* até a sua quebra, fato este que está em concordância com o conhecido teorema KAM [3]. Isto pode ser verificado através de estudos numéricos pela construção de mapas de Poincaré.

7. O caso de torques externos constantes não-nulos

Agora, analisaremos o caso de torques externos constantes e não-nulos. Por questão de simplicidade, vamos considerar $L_1 = L_2 = L$ e $m_1 = m_2 = m$. Assim como no caso anterior, há quatro pontos de equilíbrio:

$$\mathcal{P}'_1 = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{\beta_1}{\sqrt{-\beta_1^2 + 4m^2g^2L^2}}\right) \\ 0 \\ \arctan\left(\frac{\beta_2}{\sqrt{-\beta_2^2 + m^2g^2L^2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}'_2 = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{\beta_1}{\sqrt{-\beta_1^2 + 4m^2g^2L^2}}\right) \\ 0 \\ \arctan\left(\frac{\beta_2}{-\sqrt{-\beta_2^2 + m^2g^2L^2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\mathcal{P}'_3 = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{\beta_1}{-\sqrt{-\beta_1^2 + 4m^2g^2L^2}}\right) \\ 0 \\ \arctan\left(\frac{\beta_2}{\sqrt{-\beta_2^2 + m^2g^2L^2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}'_4 = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{\beta_1}{-\sqrt{-\beta_1^2 + 4m^2g^2L^2}}\right) \\ 0 \\ \arctan\left(\frac{\beta_2}{-\sqrt{-\beta_2^2 + m^2g^2L^2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Aqui, fizemos os torques externos constantes, $T_1 = \beta_1$ e $T_2 = \beta_2$. As coordenadas são definidas como $(\theta_1, p_1,$

$\theta_2, p_2)$. As coordenadas destes pontos de equilíbrio devem ser reais, o que implica na imposição simultânea das condições:

$$-2mgL \leq \beta_1 \leq 2mgL, \quad (40)$$

$$-mgL \leq \beta_2 \leq mgL. \quad (41)$$

Se estas condições são satisfeitas, estes pontos de equilíbrio existirão. O mesmo procedimento usado anteriormente para a obtenção da natureza dos pontos de equilíbrio é aqui aplicado, e sua natureza determinada. Mostra-se que para:

$$-2mgL < \beta_1 < 2mgL \quad (42)$$

$$-mgL < \beta_2 < mgL, \quad (43)$$

a natureza dos pontos de equilíbrio é a mesma que no caso de torques externos nulos. Em outras palavras, \mathcal{P}'_1 é um puro centro, com uma energia associada dada por:

$$E_1 = -\sqrt{(-\beta_2^2 + m^2g^2L^2)} - \sqrt{-\beta_1^2 + 4m^2g^2L^2} +$$

$$-\arctan\left(\frac{\beta_1}{\sqrt{-\beta_1^2 + 4m^2g^2L^2}}\right)\beta_1 -$$

$$\arctan\left(\frac{\beta_2}{\sqrt{-\beta_2^2 + m^2g^2L^2}}\right)\beta_2. \quad (44)$$

Em relação aos pontos de equilíbrio \mathcal{P}'_2 e \mathcal{P}'_3 , estes são centros-sela, cujas energias associadas são respectivamente:

$$E_2 = -\sqrt{-\beta_2^2 + m^2g^2L^2} + \sqrt{-\beta_1^2 + 4m^2g^2L^2} +$$

$$-\arctan\left(\frac{\beta_1}{-\sqrt{-\beta_1^2 + 4m^2g^2L^2}}\right)\beta_1$$

$$-\arctan\left(\frac{\beta_2}{\sqrt{-\beta_2^2 + m^2g^2L^2}}\right)\beta_2 \quad (45)$$

e

$$E_3 = \sqrt{-\beta_2^2 + m^2g^2L^2} - \sqrt{-\beta_1^2 + 4m^2g^2L^2} +$$

$$-\arctan\left(\frac{\beta_1}{\sqrt{-\beta_1^2 + 4m^2g^2L^2}}\right)\beta_1 -$$

$$\arctan\left(\frac{\beta_2}{-\sqrt{-\beta_2^2 + m^2g^2L^2}}\right)\beta_2. \quad (46)$$

O quarto ponto de equilíbrio \mathcal{P}'_4 é um pura sela, com energia:

$$E_4 = \sqrt{-\beta_2^2 + m^2g^2L^2} + \sqrt{-\beta_1^2 + 4m^2g^2L^2} +$$

$$-\arctan\left(\frac{\beta_1}{-\sqrt{-\beta_1^2 + 4m^2g^2L^2}}\right)\beta_1$$

$$-\arctan\left(\frac{\beta_2}{-\sqrt{-\beta_2^2 + m^2g^2L^2}}\right)\beta_2. \quad (47)$$

Se $\beta_1 = \beta_2 = 0$, recaímos no caso dos torques nulos, e a classificação destes pontos de equilíbrio é a mesma. No caso especial:

$$|\beta_2| = mgL \text{ e } |\beta_1| = 2mgL, \quad (48)$$

observamos que os pontos de equilíbrio são do tipo degenerados, e neste caso a análise linear falha, conforme mencionado no caso do pêndulo simples na presença de um torque externo.

A partir destes resultados vemos que na vizinhança linear de cada ponto de equilíbrio, a topologia das órbitas no espaço de fase é a mesma para ambos os casos (de torques externos nulos e torques externos constantes e não-nulos).

Para a introdução de torques externos constantes, sua intensidade pode ser ajustada de modo que o pêndulo assuma qualquer configuração de equilíbrio. Na maioria das situações estes pontos de equilíbrio apresentam equilíbrios instáveis, de modo que flutuações sobre as condições iniciais, levam o sistema para fora do equilíbrio. No caso de um ponto de equilíbrio do tipo centro-sela, para uma escolha especial de condições iniciais situadas sobre a variedade estável V_s , o sistema assume um equilíbrio estável, conforme pode ser visto na seção 6.1.

8. Conclusão e comentários finais

Algumas das técnicas de sistemas dinâmicos para o estudo de sistemas Hamiltonianos podem ser introduzidas em um curso de graduação em Física, após o discente de graduação ter cursado a disciplina de mecânica analítica.

Orientados por esta idéia, comparamos o comportamento do pêndulo simples e um pêndulo duplo sujeitos à torques externos constantes, quanto à estabilidade/instabilidade de suas configurações de equilíbrio, para quaisquer valores dos parâmetros do sistema. A ênfase deste trabalho é dada ao pêndulo duplo submetido a torques externos.

O pêndulo simples possui, sob regime de torque externo nulo, dois pontos de equilíbrio: um estável e outro instável. A introdução de um torque externo não nulo não altera o número de soluções estacionárias e nem a sua dinâmica em uma vizinhança linear destas. O mesmo acontece com o pêndulo duplo, que possui quatro pontos de equilíbrio: dois centro-sela, um puro centro e um pura sela. Tanto para o caso de torques externos nulos, quanto para o caso de torques externos constantes não-nulos, o número e a natureza dos pontos de equilíbrio não se alteram. Conseqüentemente, a topologia do espaço de fase do modelo na vizinhança linear de cada ponto de equilíbrio também não é alterada.

Uma característica comum aos sistemas pêndulo simples e pêndulo duplo, é o fato de que a introdução

de torques externos permite o aparecimento de pontos de equilíbrio degenerados, quando os torques assumem determinados valores não nulos.

Na vizinhança linear de cada um dos pontos de equilíbrio o sistema é, obviamente, linear. Além disso, possui um número finito de graus de liberdade; é portanto integrável. No entanto, para a análise completa do sistema em questão torna-se necessário uma investigação numérica fora da vizinhança linear dos pontos de equilíbrio. Isso porque à medida em que dela nos afastarmos, a aproximação analítica não é mais válida. Essa não integrabilidade está associada ao comportamento irregular das órbitas no espaço de fase que o sistema completo possui.

Agradecimentos

Os autores G.A. Monerat e E.V. Corrêa Silva agradecem à FAPERJ e ao CNPq respectivamente pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] L.H.A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2002).
- [2] N. Fiedler-Ferrara e C.P. Cintra do Prado, *Caos Uma Introdução* (Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1995).
- [3] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, (Cambridge University Press, New York, 2002), 2^a ed.
- [4] G.A. Monerat, H.P. de Oliveira and I.D. Soares, Phys. Rev. D **58**, 063504 (1998).
- [5] N.A. Lemos, G.A. Monerat, H.P. de Oliveira, I.D. Soares and E.V. Tonini, Phys. Rev. D **68**, 083516 (2003).
- [6] K. Iadocicco, L.H.A. Monteiro and J.G.C. Berlinck, BMC Physiology **2**, 3 (2002).
- [7] A.G. Milliaris and W.A. Brock. *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics* (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [8] R.H. Simoyi, A. Wolf and H.L. Swinney, Phys. Rev. Lett **49**, 245 (1982).
- [9] N.G. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (Elsevier, Amsterdam, 1992).
- [10] L. Landau, E. Lifchitz, *Mecânica* (Mir, Moscou, 1982).
- [11] N.A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2004), 1^aed.
- [12] R. Cuerno, A.F. Ranada and J.J. Ruiz-Lorenzo, Am. J. Phys. **60**, 73 (1992).
- [13] M. Cross, *Chaos on the Web - Physics 161: Introduction to Chaos*, chap. 2, disponível em http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Chaos_Course/Lesson2/Pendulum.pdf. Acessado em janeiro 2006.
- [14] E. Neumann, *MyPhysicsLab - Physics Simulation with Java*, disponível em http://www.mypysicslab.com/dbl_pendulum.html. Acessado em janeiro de 2006.

- [15] M. Richartz, *Sistemas Caóticos: Pêndulo Duplo* (2005). Projeto referente à disciplina 809, Universidade Estadual de Campinas, IF Gleb Wataghin. Disponível em http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem1.2005/MauricioR-Saa-Alberto_F809_RF1.pdf. Acessado em janeiro de 2006.
- [16] F. Ahmed, *DynamicsLab Example: Double Pendulum*, October (2003). Disponível em http://www.maplesoft.com/applications/app_center_view.aspx?AID=1548&CID=13&SCID=157. Acessado em janeiro 2006.
- [17] V.F. Edneral and R. Khanin, *Investigation of the Double Pendulum System by the Normal Form Method in MATHEMATICA*, Programming and Computer Software **30**, 115 (2004).
- [18] G.A. Monerat, E.V. Corrêa Silva, A.R.R. Papa, G.F.C. Brito e A.G. Cyrino, in XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física, 2005, Rio de Janeiro.
- [19] A.M.O. de Almeida, *Sistemas Hamiltonianos Caos e Quantização* (Ed. Unicamp, Campinas, 1995), 3ªed.
- [20] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, cap. 16. Disponível em http://www.math.hkbu.edu.hk/support/aands/page_567.htm. Acessado em janeiro de 2006.
- [21] M. Spivak. *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems for Advanced Calculus* (Addison-Wesley, Reading, 1965).
- [22] M.A. Moser, Commun. Pure Appl. Math. **11**, 257, 1958.
- [23] J.H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* (Ed. Gauthiers-Villars, Paris, 1899), v. 3.
- [24] H.P. Oliveira, I.D. Soares and T.J. Stuchi, Phys. Rev. D **56** 730 (1997).
- [25] O.I. Bogoyavlensky, *Methods in the Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics* (Springer-Verlag, New York, 1985).