*Revista Brasileira de Ensino de Física,* v. 26, n. 4, p. 415 - 417, (2004)
www.sbfisica.org.br

# Invariante adiabático gerado por lenta variação de coordenada generalizada

*(Adiabatic invariant generated by slow variation of a generalized coordinate)*

G.F. Leal Ferreira[1]

*Instituto de Física, DFCM, São Carlos, SP, Brasil*
Recebido em 20/09/2004; Aceito em 16/11/2004

Apresentamos estudo de sistema mecânico em que uma coordenada generalizada está sujeita a lenta variação, realizado através de tratamento hamiltoniano no qual se permite a ação de força generalizada ao longo daquela coordenada, gerando o invariante adiabático.
**Palavras-chave:** invariante adiabático, equações de Hamilton, forças generalizadas.

We present study of a mechanical system with one of its generalized coordinates under slow variation, performed through a Hamiltonian treatment in which a generalized force is allowed to act along that coordinate, generating an adiabatic invariant.
**Keywords:** adiabatic invariant, Hamilton's equations, generalized forces.

## 1. Introdução

O tema 'invariante adiabático' está relacionado ao estudo de sistema mecânico sujeito à variação lenta de parâmetro a ele associado [1]. Um caso particular é aquele em que esse parâmetro é uma coordenada generalizada que varia lentamente: o sistema evolui por estados quase estacionários, em que a energia varia mantendo relação com a variação daquela coordenada. O clássico problema é o do pêndulo em oscilação que é lentamente variado, agindo-se sobre o fio de sustentação que passa por uma pequena roldana (ver Fig. 1). Mostraremos que em casos como este, o tratamento hamiltoniano, incluindo agora forças generalizadas, leva à solução do problema. É o caso também de uma massa em revolução num plano, Fig. 2, em que o fio que a prende é lentamente puxado.

## 2. Tratamento Hamiltoniano em presença de forças generalizadas

Vamos supor que o sistema tenha lagrangiana $L$ função de duas coordenadas generalizadas, $q_1$ e $q_2$, e de suas velocidades, $\dot{q}_1$ e $\dot{q}_2$. Vamos também supor que, como no problema mencionado da Fig. 1, destas duas coordenadas, a de índice1, vai ser aquela que será lentamente variada. Deve então existir uma força generalizada $Q_1$ ao longo desta coordenada, e as equações de Lagrange serão

$$\frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1 \quad \text{com } p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \qquad (1)$$

$$\frac{dp_2}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \quad \text{com } p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}, \qquad (2)$$

em que os $p_i$ são os momentos generalizados. A hamiltoniana $H$ é obtida de

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L, \qquad (3)$$

e sua diferencial total será

$$\begin{aligned} dH = \; & \sum(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \\ & \sum\left(\tfrac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i\right). \end{aligned} \qquad (4)$$

[1]Enviar correspondência para G.F. Leal Ferreira. E-mail: guilherm@if.sc.usp.br.

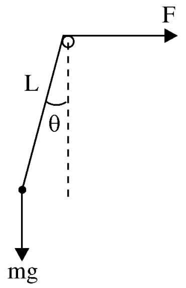


Figura 1 - O fio de sustentação do pêndulo, peso $mg$, em pequenas oscilações, passa por uma roldana de pequeno raio e e tem seu comprimento $L$ lentamente variado através da força $F$.

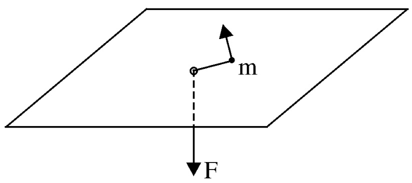


Figura 2 - A massa $m$ em movimento circular, presa ao fio que é lentamente puxado pela força $F$.

Os termos contendo os momentos generalizados, $p_i$ e $\partial L/\partial \dot{q}_i$ se cancelam, e substituindo $\partial L/\partial q_i$ das equações de Lagrange, resulta

$$dH = \dot{q}_1 dp_1 + \dot{q}_2 dp_2 + (Q_1 - \dot{p}_1)dq_1 - \dot{p}_2 dq_2. \quad (5)$$

A novidade aqui é a presença da força generalizada $Q_1$ nas equações de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\dot{p}_1 + Q_1, \; \frac{\partial H}{\partial p_1} = \dot{q}_1, \; \frac{\partial H}{\partial q_2} = -\dot{p}_2, \text{ e} \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = \dot{q}_2. \quad (6)$$

determinando também a variação da energia com o tempo. De fato, dividindo a Eq. 5 por $dt$ e usando as Eqs. 6, obtemos

$$\frac{dH}{dt} = Q_1 \dot{q}_1, \quad (7)$$

equação que nos permite escrever também

$$dH = Q_1 dq_1. \quad (8)$$

## 3. Variação lenta da coordenada 1

Se a coordenada 1 varia lentamente esperamos que $\dot{p}_1$ na primeira das Eqs. 6 possa ser desprezado, ou seja,

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} \simeq Q_1, \quad (9)$$

com $Q_1$ contrabalançando as forças inerciais como quando a coordenada 1 é considerada fixa. Entretanto, se o movimento da coordenada 2 for periódico, $Q_1$ será função do tempo, e para usá-lo no cálculo da variação da energia, Eq. 8, será necessário antes calcular o seu valor médio no período $T$ daquele movimento

$$\langle Q_1 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T Q_1(t) dt, \quad (10)$$

e então

$$dH = \langle Q_1 \rangle \, dq_1. \quad (11)$$

## 4. Aplicação ao problema da Fig. 1

O pêndulo da Fig. 1, de massa m, executa pequenas oscilações e seu comprimento $L$ é, então, sujeito a uma variação lenta, isto é, $\dot{L}/L >> T$. Deseja-se saber a relação entre a energia do pêndulo, descontada a energia potencial gravitacional média, e o seu comprimento. A hamiltoniana é dada por

$$H = \frac{p_L^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mL^2} - mgL(1 - \frac{\theta^2}{2}), \quad (12)$$

em que se usou a aproximação $cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$. A equação de Hamilton mais pertinente é a primeira das Eqs. 6, com $L$ em vez de $q_1$

$$(\frac{\partial H}{\partial L} =) - \dot{p}_L + Q_L = -\frac{p_\theta^2}{mL^3} - mg(1 - \frac{\theta^2}{2}). \quad (13)$$

Como antecipado acima, $\dot{p}_L$ pode ser desprezado na equação acima frente à $Q_L$ (variação lenta). Para eliminar o efeito da força peso no trabalho que calcularemos, vamos por $Q_L = -mg + F$, tendo $F$ o sentido oposto ao do peso, como na Fig. 1. Escreveremos então retornando à Eq. 12, com $dE$ em vez de $dH$,

$$dE = -\left\langle \frac{p_\theta^2}{mL^2} - \frac{mgL\theta^2}{2} \right\rangle \frac{dL}{L}, \quad (14)$$

em que E é a energia do movimento oscilatório do pêndulo. Podemos ultrapassar o cálculo da Eq. 10 pois sabemos que para o oscilador vale

$$\left\langle \frac{p_\theta^2}{2mL^2} \right\rangle = \left\langle \frac{mgL\theta^2}{2} \right\rangle = \frac{E}{2}, \quad (15)$$

de maneira que, da Eq. 15, obtemos

$$dE = -\frac{E}{2}\frac{dL}{L}. \quad (16)$$

Esta equação que fornece o invariante adiabático

$$EL^{1/2} = cons. \tag{17}$$

ou em termos de valores inciais

$$EL^{1/2} = E_0 L_0^{1/2}, \tag{18}$$

isto é, se o comprimento diminui, a energia de oscilação aumenta e vice-versa. O invariante adiabático do oscilador harmônico é usualmente apresentado com a razão $E/\nu$, $\nu$ sendo a frequência do oscilador, resultado esse convalidado aquí pelas Eqs. 18 e 19, visto ser $\mathrm{L}^{-1/2} \sim \nu$.

# 5. Aplicação ao problema da Fig. 2

A massa $m$, executa, no plano, movimento circular, preso ao fio que é lentamente puxado pela força $F$. Rigorosamente, a teoria das seções 2 e 3 não é aquí necessária, eis que podemos arguir algo bem conhecido, a conservação do momento angular, já que a força é central. Então,

$$mvL = C_1, \tag{19}$$

e como

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \tag{20}$$

segue que

$$EL^2 = C_2, \tag{21}$$

com $C_1$ e $C_2$ constantes. Vamos chegar a esse resultado usando as Eqs. 6 e 8. Temos para $H$ a Eq. 13, sem o termo do potencial gravitacional e também que

$$\frac{\partial H}{\partial L} \simeq Q_L = -\frac{p_\theta^2}{mL^3}. \tag{22}$$

Denotando a energia por $E$, tem-se

$$dE = Q_L dL = -\frac{p_\theta^2}{mL^3} dL, \tag{23}$$

e como $E = p_\theta^2/2m,$ chega-se à Eq. 22.

# 6. Considerações finais

Acreditamos que o presente tratamento de invariantes adiabáticos é mais simples, embora talvez menos geral, do que aquele usualmente apresentado em livros de texto, por exemplo o de Landau-Lifschitz, [1], seção 49. Ver também a Ref. [2]. De fato, ele se torna um apêndice à formulação hamiltoniana, que usualmente ignora os sistemas lagrangianos sob ação de forças generalizadas. Finalmente, notemos que o tratamento exposto não se aplica quando forças impulsivas intervém, como seria o caso de uma massa entre duas paredes refletoras que se movessem lentamente.

# Referências

[1] L. Landau e E. Lifchitz, *Mécanique* (MIR, Moscou), cap. VII.

[2] Sin-Itiro Tomonaga, *Quantum Mechanics* (North-Holand Publ., 1968), v.1 ,cap. 1 e Apêndice 6.