Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 26, n. 3, p. 287 - 289, (2004)
www.sbfisica.org.br

Nota sobre os potenciais de uma carga em movimento

(Note on the potentials of a moving charge)

G. F. Leal Ferreira[1]

Instituto de Física de São Carlos, DFCM, USP, São Carlos, SP, Brasil
Recebido em 28/07/04; Aceito em 09/08/04

Na maneira usual de se obter os potenciais de uma carga em movimento, os potenciais de Liénard-Wiechert, toma-se como ponto de partida os potenciais retardados, expressos em termos de uma distribuição volumétrica de carga. Argui-se aqui que aqueles potenciais podem também ser obtidos diretamente dos potenciais retardados de uma carga pontual, corrigidos por efeitos do tipo Doppler, característicos de grandezas propagadas e que são devidos ao movimento do emissor em relação ao ponto de observação.
Palavras-chave: potenciais de Liénard-Wiechert, potenciais retardados.

In the usual presentation, the potentials due to a moving charge, the Liénard-Wiechert potentials, are obtained from the retarded potentials expressed in terms of a volumetric charge distributions. It is argued that they may be also obtained from the retarded potentials of a moving point charge, corrected by Doppler like effects accompanying propagated entities, and caused by its motion in relation to the observation point.
Keywords: Liénard-Wiechert potentials, retarded potentials.

O estudo do Eletromagnetismo se inicia na Eletrostática com a Lei de Coulomb, fornecendo o campo elétrico em torno de uma carga pontual q. Para poder abordar o campo de distribuições de carga, densidades linear, λ, superficial, σ, e volumétrica, ρ, são definidas, de forma que q vá em λdl, σdS, e ρdV, conforme o caso, sendo dl,dS e dV as diferenciais de comprimento, área e de volume. Com o auxílio da função potencial U($\vec{x}$), o campo elétrico $\vec{E}(\vec{x})$ num ponto $\vec{x}$, de uma distribuição volumétrica V, descrita pela variável $\vec{x}$', será então,

$$U(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}')dV'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{1}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x}) \tag{2}$$

No estudo dos campos criados por correntes estacionárias, descritas por suas densidades $\vec{j}(\vec{x}')$, introduz-se o potencial vetor $\vec{A}(\vec{x})$, que semelhantemente à Eq. 1, é dada por (com c a velocidade da luz), no CGS gaussiano,

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')dV'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{3}$$

Bem mais adiante, ao querer abordar os campos criados por uma carga em movimento, os potenciais das Eqs. 1 e 3 devem ser modificados. E isto é realizado através dos potenciais retardados (e não dos campos) com [1]

$$U(\vec{x},t) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}',t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})dV'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{4}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}',t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})dV'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{5}$$

Pelas Eqs. 4 e 5, os potenciais em $\vec{x}$ e t dependem das densidades de carga e de corrente em pontos $\vec{x}'$ susceptíveis de fazerem uma mensagem, viajando com a velocidade da luz, chegar ao ponto $\vec{x}$ no tempo t, de acordo com a distância $|\vec{x}-\vec{x}'|$. Note-se que se a região V tem densidade de carga constante e desloca-se no espaço em translação, o efeito do retardo na Eq. 4 aparece na especificação dos limites de integração de V em relação ao ponto $\vec{x}$ estudado [2].

[1]Enviar correspondência para G. F. Leal Ferreira. E-mail: guilherm@if.sc.usp.br.

Historicamente, os potenciais retardados foram sugeridos pela primeira vez por L. Lorenz em 1867 [3], embora segundo esta referência, B. Riemann já tivesse em 1858 cogitado generalizar a Equação de Poisson, introduzindo o retardo. A título de ilustração, vejamos como um texto moderno, bem conhecido [1], justifica a introdução dos potenciais retardados, Eqs. 4 e 5, em tradução livre:

'...Uma expressão como a Eq. 2 (acima) é correta se as cargas estão paradas. Entretanto, tão logo nós permitimos que elas se movam ou que as correntes tenham dependência com o tempo, uma dificuldade aparece. Nós não podemos computar U($\vec{x},t$) integrando $\rho(\vec{x}',t)$ se as cargas estão em movimento arbitrário desde que os campos elétricos associados com as cargas propagam-se com a velocidade finita c. Assim, a fim de calcular o potencial num dado ponto no tempo *t*, nós devemos saber as posições das cargas, não no tempo *t*, mas em tempos retardados...'.

Note-se no texto a menção ao fato de que 'o campo elétrico associado às cargas propagam-se com velocidade c ', o que de forma nenhuma está de acordo com a ortodoxia que o autor vai desenvolver, que dá aos potenciais este previlégio [1,4,5]. Aliás, é interessante mencionar que o livro da referência [5], baseia muitas de suas considerações (que devem ser falhas) sobre o seu postulado: "The electromagnetic fields $\vec{E}$ e $\vec{B}$ are propagated from moving charges with a velocity c in empty space", página 29. Mas notemos, para efeito da discussão que iniciaremos breve, a menção no texto traduzido a que ... (os potenciais, e não os campos) associados às cargas propagar-se-iam a partir delas ... .

As Eqs. 4 e 5 são o ponto de partida para o estudo dos potenciais de uma carga pontual *q* em movimento com velocidade $\vec{v}$. No limite em que a densidade de carga se torna infinita e localizada em um ponto, as Eqs. 4 e 5 levam aos potenciais de Liénard-Wiechert, que são

$$U(\vec{r},t) = \frac{q}{\left[r(1-\frac{\vec{v}.\vec{r}}{rc})\right]_{ret}} \tag{6}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q}{c}\left[\frac{\vec{v}}{r(1-\frac{\vec{r}.\vec{v}}{cr})}\right]_{ret} \tag{7}$$

em que $\vec{r}$ é contado da posição da carga *q*, com o proviso, indicado por $[\ ]_{ret}$, de que as grandezas nele inseridas devem ser calculadas na posição retardada. Note-se que os resultados nas Eqs. 6 e 7 seguem diretamente das Eqs. 4 e 5 através de um processo limite, em que se toma uma distribuição volumétrica de cargas como ponto de partida . Mas como a distribuição volumétrica originou-se da distribuição pontual, poder-se-ia perguntar (como intuitivamente o faz [1], ver acima), se os potenciais nas Eqs. 6 e 7 não poderiam ser derivados diretamente dos potenciais da carga pontual em movimento.

Para responder a esta pergunta, temos que os potenciais simplesmente retardados seriam do tipo

$$U(\vec{r},t) = q\left[\frac{1}{r}\right]_{ret} \tag{8}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q}{c}\left[\frac{\vec{v}}{r}\right]_{ret} \tag{9}$$

obtidos de generalizações diretas das expressões estáticas, e que não concordam com as expressões dadas nas Eqs. 6 e 7. Mas notemos que a carga agora está em movimento e que os potenciais são grandezas que se propagam e que, portanto, nelas, efeitos do tipo Doppler são esperados agir. De fato, pode-se demonstrar que se t_e é o tempo de emissão (retardado) do sinal saindo da carga *q*, que tem velocidade $\vec{v}$, em $\vec{x}(t_e)$, e *t* é o tempo de chegada no ponto $\vec{X}$, Fig. 1, vale a seguinte relação

$$\frac{dt_e}{dt} = \frac{1}{1-\frac{\vec{v}.\vec{r}_{ret}}{cr_{ret}}} \tag{10}$$

mostrando que a diferença entre as Eqs. 6 e 8 e entre as Eqs. 7 e 9 está exatamente na acumulação ou rarefação dos sinais devido ao movimento da carga em relação ao ponto de observação, referido acima como efeitos do tipo Doppler. Sendo assim, as expressões 6 e 7 poderiam ser tomadas como ponto de partida para a obtenção dos potenciais, tornando mais físico o sentido das manobras matemáticas que vão das Eqs. 4 e 5 às Eqs. 6 e 7, na dedução usualmente apresentada a partir das Eqs. 4 e 5.

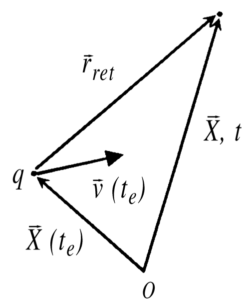

Figura 1 -

A Eq. 10 pode ser deduzida facilmente da seguinte maneira (ver Fig. 1). A carga *q* no tempo t_e está em

$\vec{x}(t_e)$, posição retardada, e age no tempo *t* no ponto $\vec{X}$, tal que

$$t = t_e + \frac{r_{ret}}{c} \tag{11}$$

em que $r_{ret}=\left|\vec{X} - \vec{x}(t_e)\right|$. Calculando agora dt/dt_e, mantendo-se $\vec{X}$ constante, a Eq. 10 segue diretamente (ver também [1,7]).

O autor agradece à colega, Profa. Mariangela T. de Figueiredo a ajuda na preparação deste.

Referências

[1] J.B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation* (Academic Press, 1965), cap. 7.

[2] Mencione-se que o muito famoso livro *Theory of Relativity* de W. Pauli, dá na seção 3 da Parte I, expressões inadequadas para os potenciais retardados.

[3] A. O 'Rahilly, *Electromagnetic Theory, A Critical Examination of Fundamentals* (Dover Publ., 1965), cap. VI.

[4] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures* (Addison-Wesley, 1966), v. 1, cap. 28.

[5] G.F. Leal Ferreira, Rev. Bras. Ensino Física, **20**, 201 (1998).

[6] W.G.V. Rosser, *Classical Electromagnetism via Relativity* (Butherworths, Londres, 1968), p. 29, postulado (4).

[7] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics,* (Jonh Wiley & Sons, 1967), cap. 14, sec. 14-4.