Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 26, n. 2, p. 161 - 164, (2004)
www.sbfisica.org.br

Método dos limites na solução de capacitores com placas não paralelas

(Limits method in the solution of capacitors with not parallel plates)

A.C. Bertuola[1] e M.V. Figueredo[2]

[1]*Departamento de Física Matemática, Instituto de Física, Universidade de São Paulo*
[2]*Departamento de Astronomia, Instituto de Astronomia e Geofísica, Universidade de São Paulo*
Recebido em 09/12/03; Revisado em 26/02/04; Aceito em 08/04/04

O presente trabalho apresenta um novo método para a solução de um problema de eletrostática proposto em livros textos de eletrodinâmica clássica. Consiste na aplicação do Método dos limites para se calcular a capacitância do capacitor de placas não paralelas.
Palavras-chave: eletrostática, capacitores.

This work presents a new method to solve an electrostatics problem considered in classical electrodynamics textbooks. This method consists in the application of the Limit Method to calculate the capacitance of the capacitor with not parallel plates.
Keywords: electrostatics, capacitors.

1. Introdução

A capacitância C, de um capacitor ideal de placas paralelas de área S, separadas por uma distância d, onde não são considerados os efeitos de borda, é bem conhecida e, no sistema gaussiano de unidades, é matematicamente dada por:

$$C = \frac{S}{4\pi d}. \tag{1}$$

Um problema proposto em vários livros textos [1, 2], é o calculo da capacitância de um capacitor de placas não paralelas, considerando que a separação sobre uma borda seja $d + \delta$ e sobre a borda oposta seja $d - \delta$, sendo δ pequeno, de tal modo que satisfaz a desigualdade $\delta << d$.

A solução proposta neste trabalho consiste em dividir o capacitor em uma associação paralela de infinitos capacitores, onde é aplicado o método dos limites para encontrar o resultado. Antes, será apresentada a solução padrão, que utiliza o método da integral.

2. Solução padrão pelo método da Integral

A solução apresentada por este método, conforme referência [3], consiste no cálculo da densidade de carga, através da lei de Gauss. Considera-se uma superfície de Gauss, numa das placas do capacitor, conforme a Figura 1.

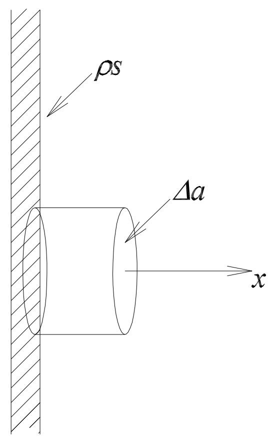

Figura 1 - Superfície cilíndrica de Gauss numa placa do capacitor. A Placa possui a densidade superficial de cargas ρs.

Aplicando a lei de Gauss tem-se:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi \int \rho s da. \tag{2}$$

E o campo elétrico **E** pode ser escrito como:

$$\mathbf{E} = 4\pi\rho s \hat{\mathbf{e}}_x. \tag{3}$$

Na Figura 2. está representada a situação proposta pelo problema com um sistema de coordenadas.

[1]Enviar correspondência para A. C. Bertuola. E-mail: bertuola@if.usp.br.

Devido aos efeitos de indução, a densidade superficial de cargas, ρs, varia na direção y, e é representada por:

$$\rho s = \rho s(y). \tag{4}$$

E o campo **E** pode ser representado por:

$$E_x(y) = 4\pi \rho s(y). \tag{5}$$

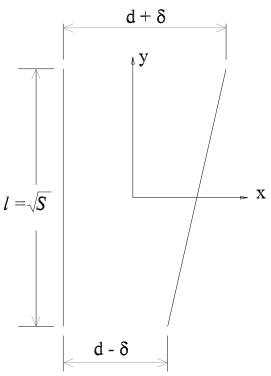

Figura 2 - Sistema de coordenadas usado para o cálculo.

A diferença de potencial, $\Delta\Phi$, entre as placas é constante, e é dada por:

$$\Delta\Phi = -\int E_x(y)dx = (-)4\pi\rho s(y)\left(d + \frac{2\delta}{l}y\right)\cdot \tag{6}$$

Isolando-se $\rho s(y)$ a partir de (6), obtém-se:

$$\rho s(y) = \frac{-\Delta\Phi}{4\pi d\left(1 + \frac{2\delta}{ld}y\right)}. \tag{7}$$

E usando a expansão:

$$\left(1 + \frac{2\delta}{ld}y\right)^{-1} = \left[1 - \frac{2\delta y}{ld} + \left(\frac{2\delta y}{ld}\right)^2 - \ldots\right] \tag{8}$$

em (7), chega-se à:

$$\rho s(y) = \frac{-\Delta\Phi}{4\pi d}\left[1 - \frac{2\delta y}{ld} + \left(\frac{2\delta y}{ld}\right)^2 - \ldots\right]\cdot \tag{9}$$

A partir de (4) e (9) pode-se calcular a carga total na placa do capacitor:

$$\begin{aligned} q &= \int \rho s da = l\int_{-l/2}^{l/2} \rho s(y)dy \\ &= \frac{-l\Delta\Phi}{4\pi d}\int_{-l/2}^{l/2}\left[1 - \frac{d\delta y}{ld} + \left(\frac{d\delta y}{ld}\right)^2 - \ldots\right]dy \\ &= \frac{-S\Delta\Phi}{4\pi d}\left[1 - 0 + \left(\frac{2\delta}{ld}\right)^2\frac{l^2}{12} - 0 + \ldots\right] \\ &= \frac{-S\Delta\Phi}{4\pi d}\left(1 + \frac{\delta^2}{3d^2}\right)\cdot \end{aligned} \tag{10}$$

E a capacitância é dada por:

$$\begin{aligned} C &= \frac{|q|}{|\Delta\Phi|} \\ &= \frac{S}{4\pi d}\left(1 + \frac{\delta^2}{3d^2}\right)\cdot \end{aligned} \tag{11}$$

3. Método dos limites

Este método consiste em aproximar a placa inclinada por uma escada composta de n capacitores de área S/n. Quando n tender a infinito ($n \to \infty$), a escada tende a uma reta inclinada, de acordo com a Figura 2.

Primeiramente, aproxima-se o capacitor da Figura 2 pela associação paralela de dois capacitores ideais de placas paralelas, conforme a Figura 3-a.

Neste caso, C_2 é dado por:

$$C_2 = \frac{S/2}{4\pi(d+\delta)} + \frac{S/2}{4\pi(d-\delta)} = \tag{12}$$

$$\frac{S/2}{4\pi d(1+\frac{\delta}{d})} + \frac{S/2}{4\pi d(1-\frac{\delta}{d})}\cdot$$

Usando-se as expansões:

$$\left(1 + \frac{\delta}{d}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{\delta}{d} + \frac{\delta^2}{d^2} - \ldots\right) \tag{13}$$

e

$$\left(1 - \frac{\delta}{d}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\delta}{d} + \frac{\delta^2}{d^2} + \ldots\right), \tag{14}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{S/2}{4\pi d}\left(1 - \frac{\delta}{d} + \frac{\delta^2}{d^2} + \ldots + 1 + \frac{\delta}{d} + \frac{\delta^2}{d^2} + \ldots\right) \\ &= \frac{S}{4\pi d}\left(1 + \frac{\delta^2}{d^2}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Seguindo, divide-se o circuito da Figura 3-a em 4 capacitores ligados em pararelo, conforme a Figura 3-b. Neste caso, a capacitância C_4 é dada por:

$$C_4 = \frac{S/4}{4\pi d(1+\frac{\delta}{d})} + \frac{S/4}{4\pi d(1+\frac{\delta}{2d})} +$$

$$\frac{S/4}{4\pi d(1-\frac{\delta}{d})} + \frac{S/4}{4\pi d(1-\frac{\delta}{2d})}\cdot \tag{16}$$

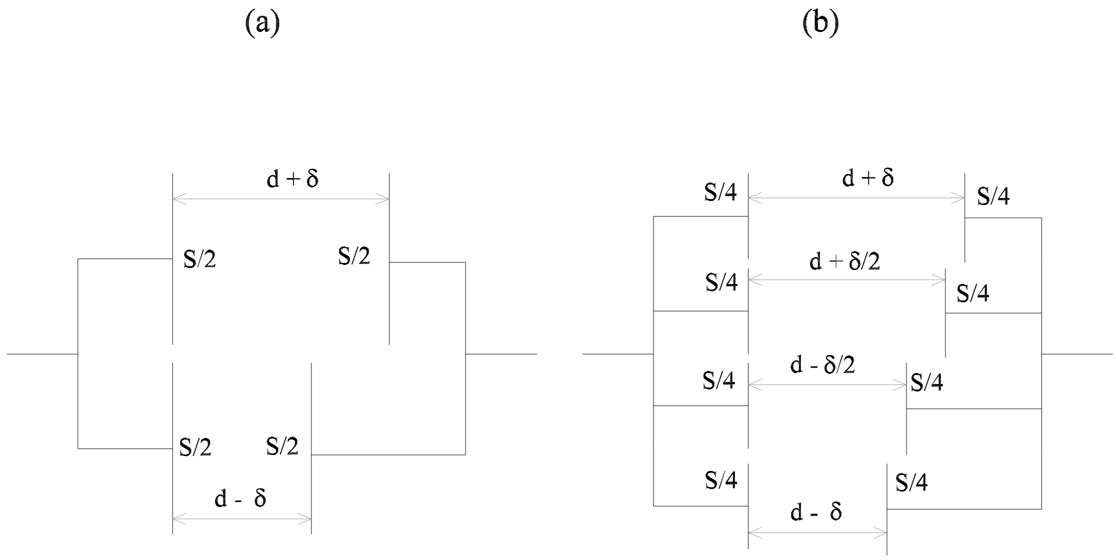

Figura 3 - Sucessivas associações de capacitores em paralelo. Em (a), $n = 2$; em (b), $n = 4$.

Usando-se novamente as expansões, do tipo (14) e (13), tem-se:

$$C_4 = \frac{S/4}{4\pi d}\left(1-\frac{\delta}{d}+\frac{\delta^2}{d^2}+1-\frac{\delta}{2d}+\frac{\delta^2}{4d^2}+1+\frac{\delta}{d}+\frac{\delta^2}{d^2}+1+\frac{\delta}{2d}+\frac{\delta^2}{4d^2}\right) \tag{17}$$

$$= \frac{S/4}{4\pi d}\left(4+\frac{2\delta^2}{d^2}+\frac{2\delta}{4d^2}\right) = \frac{S/4}{4\pi d}4\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{d^2}+\frac{\delta^2}{4d^2}\right)\right] = \frac{S}{4\pi d}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{d^2}\left(1+\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{S}{4\pi d}\left[1+\frac{\frac{\delta^2}{d^2}}{\frac{2^3}{1^2+2^2}}\right].$$

Seguindo a mesma idéia, para 8 capacitores, a capacitância C_8 será:

$$C_8 = \frac{S/8}{4\pi d}\left(\frac{1}{1-\frac{\delta}{d}}+\frac{1}{1-\frac{3\delta}{4d}}+\frac{1}{1-\frac{\delta}{2d}}+\frac{1}{1-\frac{\delta}{4d}}+\frac{1}{1+\frac{\delta}{4d}}+\frac{1}{1+\frac{\delta}{2d}}+\frac{1}{1+\frac{3\delta}{4d}}+\frac{1}{1+\frac{\delta}{d}}\right). \tag{18}$$

Usando-se novamente as expansões, tem-se:

$$
\begin{aligned}
C_8 &= \frac{S/8}{4\pi d}\left[8+\frac{2\delta^2}{d^2}+2\left(\frac{\delta}{2d}\right)^2+2\left(\frac{3\delta}{4d}\right)^2+2\left(\frac{\delta}{4d}\right)^2\right] \\
&= \frac{S}{4\pi d}\left\{1+\frac{1}{2^2}\frac{\delta^2}{d^2}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{4}{4}\right)^2\right]\right\} \\
&= \frac{S}{4\pi d}\left[1+\frac{\frac{\delta^2}{d^2}}{\frac{4^3}{1^2+2^2+3^2+4^2}}\right]. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Comparando-se C_2, C_4 e C_8, dados respectivamente por (15), (17) e (19), identifica-se a seguinte fórmula de recorrência para n capacitores:

$$
C_n = \frac{S}{4\pi d}\left[1+\frac{\frac{\delta^2}{d^2}}{\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^3}{1^2+2^2+3^2+\ldots+\left(\frac{n}{2}\right)^2}}\right], \qquad (20)
$$

onde $n = 2, 4, 8, 16, \ldots$

Usando-se a relação:

$$
1^2+2^2+3^2+\ldots\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)(2\frac{n}{2}+1)}{6} \qquad (21)
$$

aplicada à (20), tem-se:

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{S}{4\pi d}\left[1+\frac{\frac{\delta^2}{d^2}}{\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^3}{\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)(2\frac{n}{2}+1)}{6}}}\right] \\
&= \frac{S}{4\pi d}\left[1+\frac{\frac{\delta^2}{d^2}}{\frac{6\left(\frac{n}{2}\right)^3}{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)(n+1)}}\right]. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

A "escada" de capacitores tende a uma reta quando o número de capacitores tende ao infinito. Neste caso, a capacitância equivalente é dada pelo limite de (22) para $n \to \infty$.

$$
\lim_{n\to\infty} C_n = \frac{S}{4\pi d}\left[1+\frac{\delta^2}{3d^2}\right]. \qquad (23)
$$

4. Conclusão

O Método apresentado tem uma abordagem diferente, onde o conceito de limite é aplicado. Um aspecto interessante, e necessário para a solução do problema, é mostrar que a idéia física da escada de n capacitores em paralelo pode ter uma representação matemática, dada por (22). A identificação desta é a parte principal para a resolução do problema. No método padrão um aspecto interessante é a representação da densidade superficial de carga (9), necessária para o cálculo da carga total.

Apesar das dificuldades, tais como a identificação de uma fórmula de recorrência, o método apresentado ilustra a aplicação do conceito de limite em problemas físicos e sua consistência com resultados obtidos com outras abordagens.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Prof. Dr. Said Rahnamaye Rabbani, do IFUSP, e ao árbitro da RBEF, pelas correções e sugestões.

Referências

[1] J.B. Marion e M.A. Heald, *Classical Electromagnetic Radiation* (Academic Press, New York, 1965).

[2] Josif Frenkel, *Princípios de Eletrodinâmica Clássica* (Edusp, São Paulo, 1996).

[3] J.B. Marion e M.A. Heald, *Solutions Manual for Classical Electromagnetic Radiation* (Academic Press, New York, 1966).