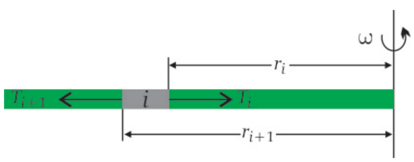
Problemas Olímpicos

Soluções dos problemas do número anterior

1 Cálculo da tensão em uma barra homogênea, de comprimento L e massa m, girando com uma velocidade angular ω.

Dividamos a barra em n segmentos de mesmo comprimento, conforme apresentado na figura abaixo.



As acelerações nos diferentes pontos serão diferentes, uma vez que as distâncias dos pontos até o eixo de rotação são diferentes. Entretanto, como a diferença $r_{i+1} - r_i$ é pequena, podemos considerar a aceleração na parte i como sendo $\omega^2(r_{i+1} - r_i)/2$. No limite de $r_{i+1} - r_i$ indo a zero, tal valor será exato. Na parte i age a força elástica T_{i+1}, por parte da seção deformada $(i + 1)$, e a força T_i por parte da seção $(i - 1)$; assim, da 2ª lei de Newton

$$T_i - T_{i+1} = \frac{m}{L}(r_{i+1} - r_i)\omega^2 \frac{r_{i+1} - r_i}{2},$$

ou

$$T_{i+1} - T_i = -\frac{m\omega^2}{2L}(r_{i+1}^2 - r_i^2).$$

A equação de movimento de cada elemento n da barra será (note que $r_{n+1} = L$ e $r_k = x$)

$$-T_n = -\frac{m\omega^2}{2L}(L^2 - r_n^2),$$

$$T_n - T_{n-1} = -\frac{m\omega^2}{2L}(r_n^2 - r_{n-1}^2), \ldots$$

$$T_{k+2} - T_{k+1} = -\frac{m\omega^2}{2L}(r_{k+2}^2 - r_{k+1}^2),$$

$$T_{k+1} - T_x = -\frac{m\omega^2}{2L}(r_{k+1}^2 - x^2).$$

Na primeira equação não há tensão no extremo, *i.e.*, $T_{n+1} = 0$. Somando as equações do sistema, obtemos a tensão $T_x = \frac{m\omega^2}{2L}(L^2 - x^2)$. Quanto mais próxima as seções da barra estiverem do eixo de rotação maior será o grau de extensão da mesma.

2 Cálculo de probabilidades de uma partícula que se move aleatoriamente em uma rede bi-dimensional quadrada

Considere primeiro o caso uni-dimensional e a expressão $1/2(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$, com $-\pi \le \varphi \le \pi$. A probabilidade de que após n movimentos a partícula atinja o ponto L será igual ao coeficiente de $e^{i\varphi L}$ na expansão binomial

$$\left[\frac{1}{2}\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right)\right]^n = \frac{1}{2^n}e^{i\phi n} + \ldots P_n(L)e^{i\phi L} + \ldots + \frac{1}{2^n}e^{-i\phi n}.$$

Assim,

$$P_n(L) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n\phi \, e^{i\phi L} d\phi.$$

Usando o mesmo raciocínio para o caso bi-dimensional, temos que a probabilidade de após n passos a partícula alcançar o ponto $L = (L_1, L_2)$ será

$$P_n(L) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{4}\left(e^{i\phi_1} + e^{-i\phi_1} + e^{i\phi_2} + e^{-i\phi_2}\right)\right]^n e^{-(i\phi_1 L_1 + i\phi_2 L_2}d\phi_1 d\phi_2.$$

Consideremos o total de trajetórias terminando no ponto L e vamos introduzir a função geratriz

$$u(z, L) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(L)z^n = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\left(e^{i\phi_1} + e^{-i\phi_1} + e^{i\phi_2} + e^{-i\phi_2}\right)}{1 + (z/2)(\cos\phi_1 + \cos\phi_2)}\right]d\phi_1 d\phi_2.$$

Mostramos agora que esta função expressa a probabilidade da partícula não retornar ao ponto inicial. Seja A um evento que pode ser repetido, f_j a probabilidade que o evento A ocorra na primeira vez na j-ésima tentativa, e u_j a probabilidade que A ocorra na j-ésima tentativa qualquer que seja a ocorrência anterior.

Seja $u_0 = 1$ e construindo os polinômios

$$u(z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^j, \text{ e } F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j.$$

Note que

$$u_j = u_0 f_j + u_1 f_{j-1} + u_{j-1} f_1.$$

Multiplicando ambos os lados da relação e somando com respeito a j de 1 até ∞, resulta

$$u(z) - 1 = F(z)u(z)$$

ou

$$F(z) - 1 = (u(z))^{-1}$$

Mas $F(1) = f1 + f2 + \ldots$ é a probabilidade que A ocorra em algum momento.

Temos duas possibilidades:

a) se $u(1) = \infty$, então $F(1) = 1$ e A certamente ocorrerá;

b) se $u(1) < \infty$, então $F(1) < 1$ e existe uma probabilidade positiva do evento A não ocorrer.

Em nosso caso, $u(1)$ (probabilidade de que a partícula retornará em algum momento ao ponto inicial) coincide com

$$u(1) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{1-(1/2)(\cos\phi_1+\cos\phi_2)}\right]d\phi_1 d\phi_2 .$$

Estas integrais divergem, e, portanto, em um passeio aleatório, a partícula sempre retornará a seu ponto inicial.

3 Determinação da pressão na seção horizontal em um vaso cilíndrico que contém um líquido e gira com velocidade angular ω.

Em uma seção horizontal, a pressão em função da distância r até o eixo de rotação varia segundo $p = p_0 + \frac{\rho\omega^2}{2}r^2$, sendo ρ a densidade do líquido e p_0 a pressão no eixo. Assim, a deformação da compressão do líquido será maior junto às paredes do recipiente. A uma distância r do eixo, vemos que o excedente de pressão é $\frac{\rho\omega^2}{2}r^2$. Por outro lado, essa pressão também determina-se pela diferença de nível do líquido a essa mesma distância e o nível do eixo: $p = \rho gh$. Igualando as expressões, obtemos $h = \frac{\omega^2}{2g}r^2$, que é a equação de uma parabola, ou seja, o líquido em rotação terá sua superfície no formato de um parabolóide.

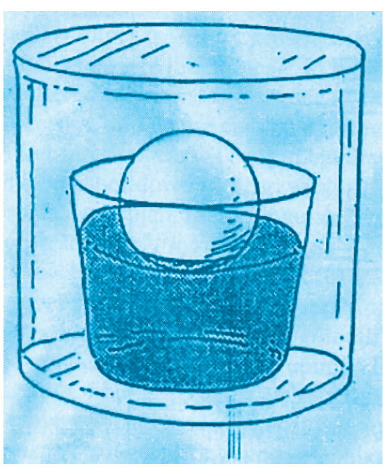
4 Análise da flutuação de uma bola leve colocada em um recipiente amplo, cheio de água, no fundo do qual existe um tubo fino.

No fluxo de água circulante, a pressão diminui à medida em que aumenta a velocidade da corrente. A velocidade da corrente de água no recipiente é sensivelmente menor do que a velocidade da corrente no tubo, e, portanto, a pressão da água no recipiente é maior do que no tubo. Na fronteira recipiente-tubo a velocidade aumenta e a pressão diminui; como consequência, a bola colocada na rede será comprimida e não emergirá.

Novos problemas

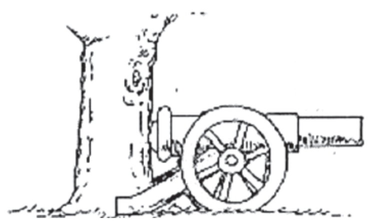
(Extraídos do *The Physics Teacher*)

1 Considere uma bola de ping-pong flutuando em um vidro com água, o qual esta contido em um recipiente hermeticamente fechado.



Quando o ar é adicionado no recipiente para que a sua pressão interna aumente, a bola de ping-pong irá abaixar, subir ou ficar como antes?

2 Suponha que um canhão seja escorado contra uma arvore maciça, de modo a reduzir o seu recuo quando acionado.



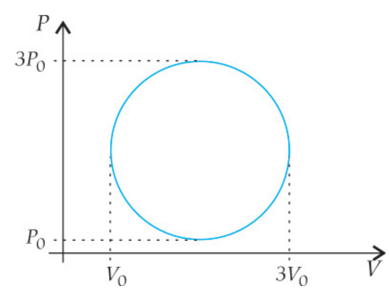
Desta forma, o alcance do canhão irá:

a) aumentar

b) decrescer

c) ficará inalterado

3 Um gás ideal realiza um ciclo circular como mostra o diagrama PV abaixo. Qual a eficiência de um ciclo de Carnot operando entre as mesmas temperaturas máxima e mínima do gás no ciclo circular?



4 Duas pequenas esferas carregadas positivamente estão suspensas por um mesmo ponto no teto por linhas isolantes, muito leves e de comprimentos iguais. A primeira esfera tem massa m_1 e carga q_1 e a segunda massa m_2 e carga q_2, Se a primeira linha faz um ângulo θ_1 com a vertical, determine o ângulo θ_2 que a segunda linha faz com a vertical.

Envie sua solução dos problemas para djpr@df.ufscar.br. Não esqueça de incluir a sua Escola na mensagem. Se estiver correta, você se candidata a uma assinatura gratuita de Física na Escola, além de constar na Lista de Honra da seção Desafitos